


# Optique géométrique

## RAPPELS DE COURS ET EXERCICES

Agnès MAUREL
Jean-Marie MALBEC



8, rue Férou 75278 Paris cedex 06
www.editions-belin.com

## Dans la collection Belin Sup Sciences

A. Maurel
*Optique géométrique*, cours

M. Saint-Jean, J. Bruneaux et J. Matricon
*Électrostatique et magnétostatique*, cours

J. Bruneaux, M. Saint-Jean et J. Matricon
*Électrostatique et magnétostatique*, résumé de cours et exercices

## Dans la collection Belin Sup Histoire des Sciences

A. Barberousse
*La mécanique statistique de Clausius à Gibbs*

M. Blay
*La science du mouvement de Galilée à Lagrange*

Photo de couverture © Digital Vision


ISSN 1158-3762 ISBN 2-7011-3033-6

# Sommaire

Chapitre 1

# Notion de rayons, lois de Descartes, principe de Fermat et stigmatisme

Un peu d'histoire

## La loi de la réfraction : de Ptolémée à Fermat

Depuis longtemps les scientifiques avaient constaté que la lumière se divise lorsqu'elle arrive à la surface de séparation entre deux milieux, une partie étant réfléchie, l'autre subissant une déviation au passage dans le second milieu. Dès l'antiquité, l'égalité des angles incident et réfléchi est connue. Mais il faudra attendre la fin du XVI[e] siècle pour que la loi de la réfraction sous sa forme actuelle ($n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$) soit énoncée.
On trouve une ébauche de description des rayons réfractés dans les essais de Ptolémée et les savants arabes donneront des tables des angles réfractés en fonction des angles incidents pour l'interface eau-verre. Mais c'est seulement en 1611 qu'on trouve la première loi de la réfraction dans le « Dioptrique » de Kepler, énoncée sous la forme simplifiée $n_1 i_1 = n_2 i_2$ (valable pour les faibles angles). C'est un peu injustement que la loi de la réfraction porte le nom de Snell-Descartes car c'est sans doute au mathématicien anglais Thomas Harriot qu'on doit le premier énoncé de cette loi telle qu'on le connaît aujourd'hui. En fait, Snell l'a probablement trouvé expérimentalement en 1621 puisqu'il n'en propose aucune démonstration tandis que Descartes en propose une mais très discutable. À l'époque, le mathématicien français Fermat s'élève d'ailleurs avec véhémence contre la pseudo-démonstration donnée par le philosophe.
Fermat s'attaque alors à l'optique et il énonce en 1650 le principe de moindre temps : parmi toutes les courbes joignant deux points de l'espace, c'est celle qui correspond au temps de parcours minimal qui est effectivement suivie par la lumière. Mais Fermat n'est pas physicien et ce n'est qu'une dizaine d'années plus tard que la loi de la réflexion est retrouvée grâce à son principe. Fermat veut aller plus loin et déclare à propos de la loi de la réfraction « Il me semble que la chose est aisée et qu'un peu de géométrie pourra nous tirer d'affaire ». Il a raison ! En 1661, il effectue la démonstration de la loi de la réfraction à partir de son principe, offrant ainsi le premier exemple de calcul variationnel appliqué à la physique. Il déclare à ce propos : « Le fruit de mon travail a été le plus extraordinaire, le plus imprévu et le plus heureux qui fût jamais car j'ai trouvé que mon principe donnait justement et précisément la même proportion des réfractions que Monsieur Descartes a établie ».

# 1. L'optique géométrique

L'optique géométrique se propose de décrire la propagation de la lumière en considérant le trajet de **rayons lumineux**, dont la direction et le sens représentent la direction et le sens de propagation de l'onde lumineuse. Ainsi, dans un milieu transparent, homogène, isotrope, caractérisé par son indice de réfraction, la lumière se propage en ligne droite.
Il faut garder à l'esprit que l'optique géométrique n'est valable que si toutes les dimensions du problème, notamment la dimension des diaphragmes qui limitent les faisceaux, sont très supérieures à la longueur d'onde. Sans quoi des phénomènes de diffraction interviennent, et la notion même de rayon n'a plus de sens.

# 2. Caractéristiques d'un milieu optique

## 2.1. Milieux transparent, homogène, isotrope

Un milieu est dit :
- **transparent** s'il laisse passer la lumière (par opposition à un milieu opaque) ;
- **homogène** si ses caractéristiques optiques sont indépendantes de l'espace ;
- **isotrope** si ses caractéristiques optiques sont indépendantes de la direction selon laquelle se propage le rayon lumineux.

## 2.2. Indice d'un milieu

On définit l'**indice optique** $n$ d'un milieu par : $n = \frac{c}{v} > 1$, où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide et $v$ sa vitesse de propagation dans le milieu considéré. Plus l'indice d'un milieu est élevé, plus le milieu est **réfringent**.
Dans un milieu transparent inhomogène, l'indice optique $n$ dépend du point de l'espace considéré dans ce milieu.

# 3. Propagation des rayons lumineux

## 3.1. Le chemin optique

Le chemin optique entre deux points A et A' correspond à la longueur parcourue par la lumière dans le vide pendant le même temps qu'elle mettrait à parcourir le trajet AA' dans le milieu considéré d'indice $n$ :

$$L_{AA'} = \int_{t}^{t'} c\,dt = \int_{A}^{A'} n\,ds$$

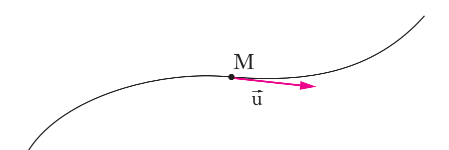
## 3.2. Le principe de Fermat

**Le principe de Fermat** prévoit que le trajet suivi par la lumière du point A au point A' est celui pour lequel le chemin optique est extrémal.

Lorsque le milieu est homogène ($n$ = cte), la lumière se propage en ligne droite.
La propagation d'un rayon lumineux dans un milieu transparent inhomogène est gouvernée par l'équation dite « équation des rayons » et qui s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(n) = \frac{\mathrm{d}(n\vec{u})}{\mathrm{d}s}$$

où $n$ est l'indice au point courant M, $\vec{u}$ est le vecteur unitaire tangent au rayon en M et $s$ l'abscisse curviligne le long du rayon.



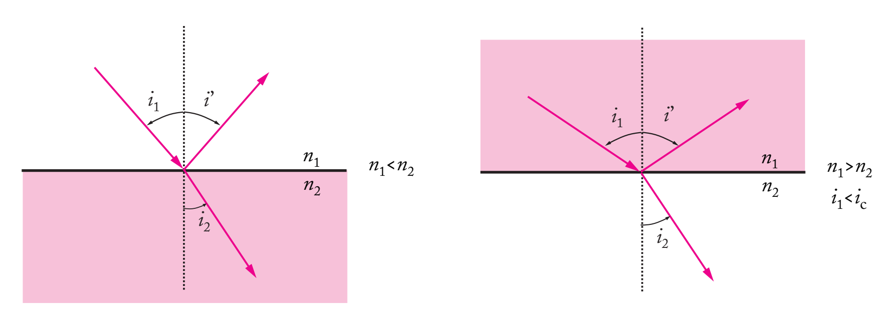

## 3.3. Lois de Descartes

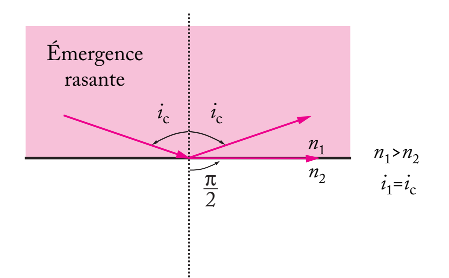
• **Réflexion et réfraction** Un rayon lumineux et la normale au point d'incidence sur la surface d'un dioptre ou d'un miroir définissent un plan appelé plan d'incidence. Si $i_1$ désigne l'angle d'incidence, $i'$ l'angle réfléchi et $i_2$ l'angle réfracté par rapport à la normale les lois de Descartes s'énoncent ainsi :
Le rayon réfléchi et le rayon réfracté appartiennent au plan d'incidence.
**Pour la réflexion**, on a $i' = i_1$.
**Pour la réfraction**, on a $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

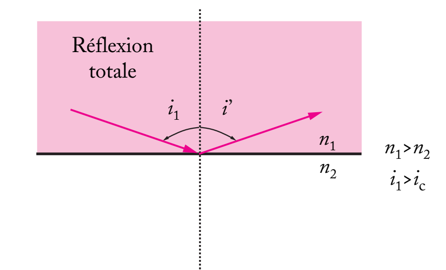
• **Incidence critique et réflexion totale** Le rayon réfléchi existe toujours ; en revanche, si le rayon se propage d'un milieu vers un autre milieu moins réfringent, il existe un angle d'incidence critique $i_c$ tel que :

$$\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Pour un angle d'incidence supérieur à $i_c$, il y a réflexion totale.






# 4. Instruments optiques

## 4.1. Dioptre et miroir

On appelle **dioptre** une surface de séparation entre deux milieux homogènes, transparents et isotropes et on considère un **miroir** comme un dioptre particulier. Le comportement d'un rayon lumineux à la surface d'un dioptre ou d'un miroir est régi par les lois de Descartes.

## 4.2. Stigmatisme

Un système optique (S) est dit **rigoureusement stigmatique** pour deux points A et A', si tout rayon lumineux issu de A passe par A' après avoir traversé (S) ; Cette condition correspond à un chemin optique $L_{AA'}$ constant quel que soit le rayon lumineux considéré. On dit que les points A et A' sont **conjugués** par rapport à (S). Les cas de stigmatisme rigoureux étant rares (miroir plan ou dioptre sphérique aux points de Weierstrass), on se contente souvent d'un **stigmatisme approché**, obtenu pour deux points A et A' lorsque tout rayon issu de A passe au voisinage de A' après avoir traversé (S). $L_{AA'}$ n'est alors constant qu'au premier ordre.

La relation liant les positions relatives de deux points conjugués est appelée relation de conjugaison.

# Notion de rayons

## Exercice 1 Le filtre chromatique

Un rayon lumineux est constitué de la superposition de deux couleurs ou radiations, rouge et violette. Ce rayon se propage dans un verre dont les indices pour la lumière rouge et la lumière violette sont respectivement égaux à $n_r = 1{,}595$ et $n_v = 1{,}625$. Ce rayon arrive sur la surface de séparation avec l'air.

**1. Calculer les angles d'incidence critique pour les lumières rouge et violette dans ce verre.**

**2.a. Quelle(s) couleur(s) observe-t-on dans l'air si le rayon arrive dans ce milieu sous un angle d'incidence $i = 35°$ ?**

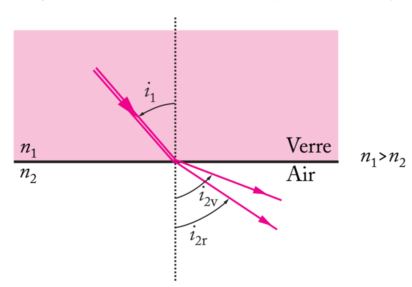
**b. Même question si le rayon arrive sous un angle d'incidence $i = 38{,}5°$.**

**3. Quel est l'intérêt de ce type de montage ?**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté majeure ; il s'agit d'une application directe de la loi de Descartes pour la réfraction $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.**

**1.** Le calcul des angles d'incidence critique s'effectue à l'aide de la loi de Descartes pour la réfraction : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, avec dans le verre $n_1 = n_r$ ou $n_v$, et $n_2$ indice de l'air.




L'angle d'incidence critique $i_{1c}$ correspond à un angle d'émergence $i_2$ égal à $\pi/2$, soit $n_1 \sin i_{1c} = n_2$.
On a donc :

$$i_{1c} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

A.N. $i_{1c}(\text{rouge}) = 38{,}8°$ et $i_{1c}(\text{violet}) = 37{,}9°$.

**2. a.** Pour un angle d'incidence égal à $i = 35°$, inférieur aux deux angles critiques, les deux radiations émergent du verre et sont réfractées dans l'air. En revanche, les angles de réfraction sont différents pour les deux radiations : les radiations sont donc séparées après réfraction (figure ci-dessus).
**b.** Si l'angle d'incidence est égal à 38,5° seule la radiation rouge sera réfractée. La radiation violette sera totalement réfléchie.

**3.** Ce type de montage peut être utilisé comme un filtre chromatique non coloré puisqu'il permet d'éliminer certaines radiations (celles qui sont totalement réfléchies).

## Exercice 2 Caractéristique d'une onde

L'indice de réfraction d'un milieu transparent dépend de la température du milieu mais aussi de la fréquence de l'onde considérée.
Un rayon lumineux se propage dans l'air. Il arrive sur un morceau de flint (le flint est un verre à base de plomb utilisé en optique) avec un angle d'incidence de 20° avec la normale à la surface de verre.
L'indice de réfraction du flint est $n = 1{,}585$ pour une radiation de longueur d'onde $\lambda = 486$ nm.

**Que deviennent les quantités suivantes : fréquence, vitesse de l'onde et longueur d'onde lorsque la lumière passe de l'air au flint (on assimile l'air au vide).**
**Faire les applications numériques dans les milieux 1 (l'air) et 2 (le flint).**

### Solution

**CONSEIL : on s'interroge ici sur les modifications des différentes quantités associées à une onde au cours de sa propagation : fréquence, longueur d'onde et célérité. Une notion essentielle est la conservation de la fréquence d'une onde.**

Une onde lumineuse est caractérisée par sa fréquence $f$ : la fréquence est une grandeur invariante de l'onde. Une onde de longueur d'onde $\lambda_2 = 486$ nm dans le flint, dont l'indice est $n_2 = 1{,}585$, a une fréquence :

$$f = \frac{v_2}{\lambda_2} = \frac{c}{n_2\lambda_2} = 3,895 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}.$$

Par définition de l'indice d'un milieu, les vitesses de l'onde dans les milieux 1 et 2 sont données par :

- dans l'air, $n_1 = 1, v_1 = \frac{c}{n_1} = 3 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}$

- dans le flint, $n_2 = 1{,}585, v_2 = \frac{c}{n_2} = 1,89 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}$

Dans le flint, on a $\lambda_2 = 486$ nm. La longueur d'onde $\lambda_1$ dans l'air se déduit de la vitesse $v_1$ et de la fréquence $f$ :

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{n_2}{n_1}\lambda_2 = 770\,\text{nm}.$$

En conclusion, lorsque la lumière passe d'un milieu à un autre, seule la fréquence est conservée ; sa vitesse de progagation et sa longueur d'onde sont modifiées.

## Exercice 3 Le toluène et le verre



Le toluène ($C_6H_5$–$CH_3$), corps organique liquide dérivé du benzène, est non miscible dans l'eau. En procédant avec attention, on remplit successivement un bécher de deux liquides formant ainsi deux couches : eau/toluène. On y introduit alors la tige de verre (photo ci-contre). On rappelle que l'indice de réfraction du verre est égal à $n$ = 1,33.

**Commenter la photo. Que vaut l'indice optique du toluène ?**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice, fondé sur l'analyse d'une photo, s'appuie sur la notion de réfraction des rayons lumineux au passage d'un milieu 1 à un milieu 2 (ici le verre et l'eau ou le verre et le toluène).**

La partie de la tige immergée dans l'eau est visible ; les indices de réfraction de l'eau et du verre sont très différents et les rayons traversant le verre sont déviés. En revanche, on ne voit pas (ou très peu) la partie de la tige immergée dans le toluène. Cela signifie que les rayons se propageant dans le toluène et rencontrant le verre sont peu déviés : l'indice du toluène est voisin de celui du verre. Ainsi, on déduit immédiatement :$n_{\text{toluène}} \approx n_{\text{verre}}$ = 1,33.

# Lois de Descartes

## Exercice 4 Constructions géométriques de Descartes des rayons réfléchi et réfracté

Descartes a proposé une construction géométrique des rayons réfracté et réfléchi lorsqu'un rayon incident dans un milieu d'indice $n_1$ rencontre une interface (dioptre plan) séparant le premier milieu d'un autre, d'indice $n_2$. Dans cette construction, le point d'incidence I est pris pour centre de deux cercles $C_1$ et $C_2$ de rayons égaux respectivement aux indices $n_1$ et $n_2$ (à un facteur multiplicatif près). Le rayon incident est prolongé jusqu'au cercle $C_1$ qu'il coupe en un point J. La perpendiculaire au dioptre passant par J coupe $C_2$ en A dans le milieu d'indice $n_2$, et, $C_1$ en B dans le milieu d'indice $n_1$. Le rayon réfracté correspond au rayon IA et le rayon réfléchi au rayon IB.

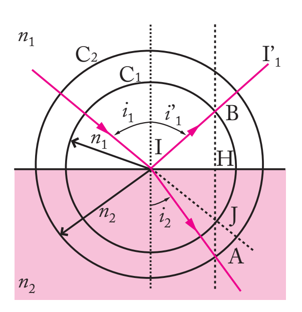
**1. En supposant que $n_1 < n_2$, montrer que cette construction permet de retrouver les lois de Descartes.**

**2. Dans le cas où $n_1 > n_2$, montrer par une construction géométrique l'existence d'une réflexion totale.**

## Solution

**CONSEIL : les constructions de Descartes étant décrites dans l'énoncé, le problème consiste à réaliser la construction géométrique et à en exploiter les propriétés géométriques pour retrouver les lois de Descartes.**

**1.**

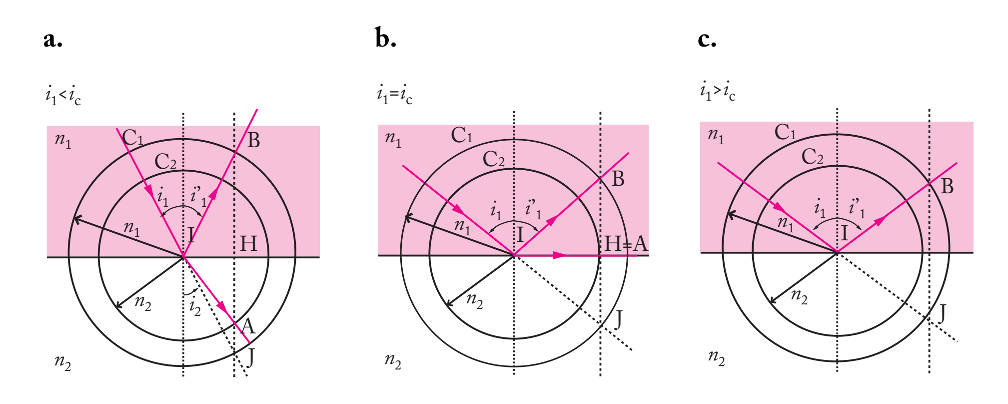



La construction géométrique ci-dessus permet de retrouver les lois de Descartes. En effet, on a pour le rayon incident : $\sin i_1 = \dfrac{\text{IH}}{\text{IJ}} = \dfrac{\text{IH}}{n_1}$, pour le rayon réfracté : $\sin i_2 = \dfrac{\text{IH}}{\text{IA}} = \dfrac{\text{IH}}{n_2}$, et pour le rayon réfléchi : $\sin i'_1 = \dfrac{\text{IH}}{\text{IB}} = \dfrac{\text{IH}}{n_1}$.

On obtient donc : $i'_1 = i_1$ et $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Remarquons qu'avec $n_2 > n_1$, la droite passant par J et perpendiculaire au dioptre coupe toujours C$_2$ en un point A et C$_1$ en un point B : il y a toujours un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

**2.** Avec $n_2 < n_1$, le point A n'existe pas toujours. Pour de faibles valeurs de $i_1$, la perpendiculaire au dioptre passant par J coupe le cercle C$_2$ : on observe un rayon réfracté et un réfléchi (fig. a.). Pour un angle d'incidence $i_1$ supérieur à une valeur critique $i_c$, la perpendiculaire au dioptre passant par J ne coupe pas C$_2$ : on observe seulement un rayon totalement réfléchi (fig. c.). Le cas limite est obtenu lorsque la perpendiculaire au dioptre passant par J est tangente à C$_2$ (fig. b.). Le point A est confondu avec le point H et on a IH = $n_2 = n_1 \sin i_c$, d'où la valeur de $i_c$ définie par la relation : $\sin i'_1 = \dfrac{n_2}{n_1}$.



## Exercice 5 Construction géométrique de Huygens

La construction géométrique de Huygens permet de tracer un rayon réfracté IB à partir d'un rayon incident donné AI. Dans un premier temps, on trace, dans le milieu d'indice de réfraction $n_2$, deux demi-cercles concentriques $C_1$ et $C_2$, de centre I et de rayons respectifs $R_1 = \frac{1}{n_1}$ et $R_2 = \frac{1}{n_2}$. On prolonge le rayon incident et on note D l'intersection de (AI) avec $C_1$. On mène alors la tangente en D à $C_1$ : elle coupe le dioptre plan en H. La tangente à $C_2$, passant par H, coupe $C_2$ en B. IB correspond au rayon réfracté.

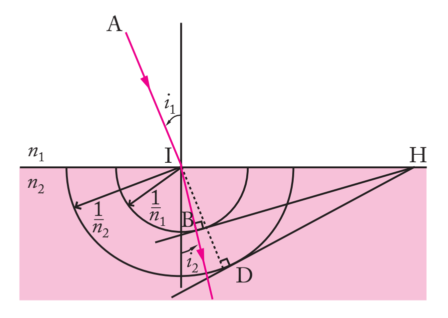
**1. Réaliser les constructions pour $n_1 < n_2$ et $n_1 > n_2$.**

**2. Que se passe-t-il si IH $< \frac{1}{n_2}$ ?**

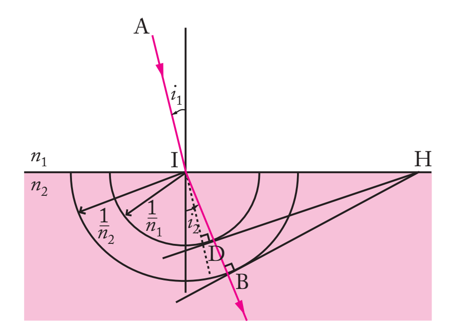
### Solution

**CONSEIL : comme dans l'exercice précédent, il s'agit ici de réaliser la construction de Huyghens donné dans l'énoncé et d'en déduire les propriétés demandées.**

**1.** Cas $n_1 < n_2$ : l'angle $i_1$ est alors plus grand que l'angle $i_2$ :




Cas $n_1 > n_2$ : l'angle $i_1$ est alors plus petit que l'angle $i_2$ :




**2.** Si IH $< \frac{1}{n_2}$, il y a réflexion totale et aucun rayon lumineux ne traverse le milieu.

Notons que cela n'est possible que dans le cas $n_1 > n_2$ (voir construction).

## Exercice 6 Lois de Descartes ou sauvetage en mer…

Au XVII$^e$ siècle Fermat a énoncé un principe qui permet aujourd'hui de comprendre l'optique des rayons lumineux : « La lumière se propage d'un point vers un autre sur une trajectoire telle que la durée du parcours soit minimale ». Nous nous proposons de reprendre cette notion dans un cadre un peu différent.

Un maître nageur, initialement en A sur la plage, doit sauver un nageur qui se noie en B dans la mer. Sa vitesse de marche sur le sable est $V_1$ tandis que sa vitesse de nage est $V_2$ ($V_2 < V_1$).

**1. Quel chemin le maître nageur devra-t-il prendre, le plus rapide ou bien le plus court ?**

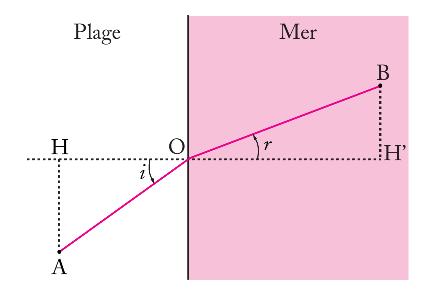
**2. Exprimer cette condition et retrouver la loi de Descartes relative à la réfraction.**

### Solution

**CONSEIL : l'objet de cet exercice est de retrouver la loi de Descartes relative à la réfraction en utilisant le principe de Fermat : la lumière suit un chemin qui minimise son temps de parcours. Au passage d'un milieu 1 à un milieu 2, la vitesse de l'onde est modifiée et le principe de Fermat prévoit que l'onde ira du point A dans le milieu 1 au point B dans le milieu 2 suivant une courbe $L_{AB}$ telle que son temps de parcours le long de $L_{AB}$ soit minimum. Cette propriété de l'onde est reprise ici dans le cas d'un maître nageur se déplaçant sur une plage ou dans l'eau.**

**1.** Le maître nageur va prendre le chemin le plus rapide s'il veut sauver la personne à temps. Il est raisonnable de penser qu'il va courir plus vite sur la plage qu'il ne peut nager dans l'eau ! Il faut donc qu'il trouve un compromis tel que le chemin comporte une partie du trajet plus important sur la plage que dans l'eau.

**2.** Pour mener à bien le calcul demandé, il faut donc exprimer le temps $T$ mis par le maître nageur du point A au point B sachant qu'il atteindra le bord de l'eau en un point O (voir figure ci-dessous). Entre A et O sa vitesse est égale à $V_1$ et entre O et B, sa vitesse est $V_2$. Sur AO et OB, la façon la plus rapide de se déplacer reste bien sûr la ligne droite ! Toute la difficulté consiste à trouver la position du point O qui minimise $T$. Ceci est réalisé en différentiant $T$ par rapport à une variable qui décrit la position du point O.




La durée $T$ du trajet AB est égale à :

$$T = \frac{AO}{V_1} + \frac{OB}{V_2} = \frac{OH}{V_1 \cos i} + \frac{OH'}{V_2 \cos r}$$

Remarquons que, quel que soit le chemin emprunté, les distances OH et OH' sont constantes.

Par ailleurs, la distance AH + H'B = cte, ce qui peut également s'écrire :

$$\text{OH} \tan i + \text{OH'} \tan r = \text{cte}$$

Changer de trajet revient à changer d'angle d'incidence $i$ (attention, $r$ n'est pas indépendant de $i$). Pour déterminer l'angle $i$ correspondant à la durée minimale du trajet, A et B étant fixés, il suffit de chercher $i$ tel que $\frac{dT}{di} = 0$. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\text{OH} \sin i}{V_1 \cos^2 i} + \frac{\text{OH'} \sin r}{V_2 \cos^2 r}\left(\frac{dr}{di}\right) = 0$$

$$\text{et} \quad \frac{\text{OH}}{\cos^2 i} + \frac{\text{OH'}}{\cos^2 r}\left(\frac{dr}{di}\right) = 0$$

On exprime $\frac{dr}{di}$ à partir de la seconde expression et on simplifie la première expression :

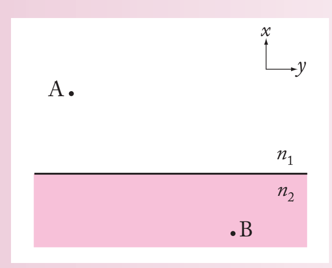
$$\frac{\sin i}{V_1} = \frac{\sin r}{V_2}$$

Appliquée à l'optique géométrique où $V_1 = \frac{c}{n_1}$ et $V_2 = \frac{c}{n_2}$ cette relation est équivalente à la loi de Descartes pour la réfraction.

# Principe de Fermat. Stigmatisme

## Exercice 7 Du principe de Fermat à la loi de Snell-Descartes

Un dioptre plan sépare deux milieux d'indices de réfraction $n_1$ et $n_2$. On cherche le rayon lumineux qui se propage du point A, dans le premier milieu, vers le point B dans le deuxième milieu. I est le point d'intersection du dioptre plan avec le rayon.




**1. Recopier et compléter le schéma ci-dessus, placer le point I sur le dioptre plan, le rayon AI puis IB, les angles $i_1$ et $i_2$ de ces deux rayons par rapport à la normale au dioptre passant par I, ainsi que $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ coordonnées respectives de A et B dans un repère orthonormé I$xy$.**

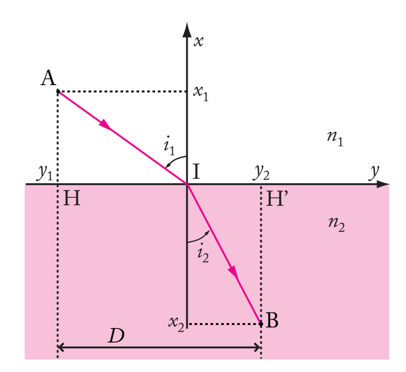
**2. Exprimer le chemin optique $L(AB)$ en fonction des grandeurs $n_1$, $n_2$, $x_1$, $x_2$, $y_1$ et $y = y_2 + y_1$. De combien de variables $L(AB)$ dépend-il ?**

**3. Retrouver la loi de Snell-Descartes en appliquant le principe de Fermat qui prévoit que le chemin optique est minimal (on dit aussi stationnaire).**

## Solution

**CONSEIL : cet exercice ne pose pas de problème de mise en forme mathématique, l'énoncé guidant fortement vers une mise en place des équations à résoudre. Il suffit donc de se laisser guider !**

**1.**




**2.** Les points A, B et le dioptre sont fixés donc les valeurs de $x_1$ et $x_2$ sont constantes. Il en est de même pour la distance latérale (parallèle au dioptre) entre A et B, c'est à dire pour $D = y_2 - y_1$. Le chemin optique $L(\mathrm{AB})$ est par définition :

$$L(\mathrm{AB}) = n_1\,\mathrm{AI} + n_2\,\mathrm{IB}$$

Dans le triangle AIH, on a :

$$\mathrm{AI} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,.$$

De même dans le triangle BIH' :

$$\mathrm{IB} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_2^2 + (D + y_1)^2}.$$

On en déduit l'expression de $L(\mathrm{AB})$ :

$$L(\mathrm{AB}) = L(y_1) = n_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + n_2\sqrt{x_2^2 + (D + y_1)^2}$$

Ce chemin optique ne dépend que de $y_1$ puisque $x_1$, $x_2$ et $D$ sont constants.

**3.** Le chemin optique est minimal si ses dérivées partielles, par rapport à toutes les variables, sont nulles. Ici, $L(\mathrm{AB})$ ne dépend que de $y_1$, cette condition s'exprime par :

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}y_1} = n_1\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + n_2\frac{D + y_1}{\sqrt{x_2^2 + (D + y_1)^2}} = 0$$

On a, par ailleurs :

- dans le triangle AHI, $\sin i_1 = \dfrac{-y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

- dans le triangle BH'I, $\sin i_2 = \dfrac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \dfrac{D + y_1}{\sqrt{x_2^2 + (D + y_1)^2}}$

On retrouve bien la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

## Exercice 8 Stigmatisme approchée d'un dioptre plan

Un dioptre plan sépare deux milieux d'indice $n$ et $n'$. On considère un point source A dans le milieu d'indice $n$. La normale au dioptre passant par A coupe le plan du dioptre en O. Un rayon issu de A est réfracté en I sur le dioptre. Le prolongement du rayon réfracté coupe la droite OA en un point A'. On note $i$ et $i'$ les angles formés par les rayons incident et réfracté par rapport à la normale au dioptre en I.

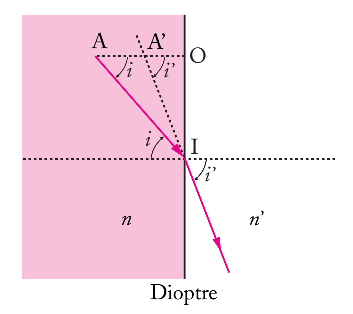
**1. Exprimer le chemin optique $L$ entre A et A' en fonction de OA, OA', $n$, $n'$, $i$ et $i'$.**

**2. Montrer que la condition de stigmatisme est obtenue dans l'approximation paraxiale. Quelle relation de conjugaison obtient-on alors ?**

### Solution

**CONSEIL : l'objet de cet exercice est d'établir la relation de conjugaison d'un dioptre plan dans l'approximation paraxiale, c'est-à-dire pour des angles faibles entre les rayons lumineux et l'axe. La relation de conjugaison du dioptre lie les positions relatives de l'objet (ici A) et de son image (A'), les points A et A' étant dits points conjugués à travers le dioptre.**

**1.**




Exprimons le chemin optique $L$ entre A et A' :

$$L = n\,\text{AI} - n'\,\text{IA'}.$$

Le chemin optique entre I et A' est compté négativement car l'image A' est virtuelle. Dans les triangles AOI et A'OI, rectangles en O, on a :

$$\text{AI} = \frac{\text{OA}}{\cos i} \quad \text{et} \quad \text{A'I} = \frac{\text{OA'}}{\cos i'}$$

On a donc :

$$L = n\frac{\text{OA}}{\cos i} - n'\frac{\text{OA'}}{\cos i'}$$

**2.** Le principe de Fermat prévoit qu'un système optique est stigmatique si, pour deux points conjugués, le chemin est indépendant de l'angle $i$ (et donc de $i'$). La dérivée de $L$ par rapport à $i$ est donc nulle :

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i} = n\frac{\text{OA}\sin i}{\cos^2 i} - n'\frac{\text{OA'}\sin i'}{\cos^2 i'}\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}i} = 0$$

$i$ et $i'$ sont liés par la loi de réfraction de Descartes : $n \sin i = n' \sin i'$.
En différentiant cette expression, on obtient : $n \cos i \, \mathrm{d}i = n' \cos i' \, \mathrm{d}i'$.

On remplace, dans $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i}$, $\mathrm{d}i'$ par son expression en fonction de $\mathrm{d}i$. On obtient finalement :

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i} = n^2 \sin i \cos i \left( \frac{\text{OA}}{n \cos^3 i} - \frac{\text{OA'}}{n' \cos^3 i'} \right)$$

À ce stade, $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i} = 0$ quel que soit $i$, réaliserait le stigmatisme rigoureux, ce qui n'est manifestement pas possible ; en effet, on aurait alors :

$$\frac{n\overline{\text{OA}}^2}{n'\overline{\text{OA'}}^2} = \frac{\overline{\text{AI}}^3}{\overline{\text{A'I}}^3}$$

quelle que soit la position de I ; or le rapport $\frac{\text{AI}}{\text{A'I}}$ n'est pas constant lorsque I se déplace le long du dioptre.
On recherche alors la condition de stigmatisme approché en se plaçant dans l'approximation paraxiale, où les angles $i$ et $i'$ sont faibles.

Au premier ordre, $\cos i \approx \cos i' \approx 1$ et $\sin i \approx i$, soit : $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i} \approx ni\left( \frac{\text{OA}}{n} - \frac{\text{OA'}}{n'} \right) = 0$

Si $\frac{\text{OA}}{n} = \frac{\text{OA'}}{n'}$, on a alors $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}i} \approx 0$ quel que soit $i$.
On a donc établi une relation de conjugaison pour les points A et A'. Le dioptre plan réalise une condition de stigmatisme approché.

## Exercice 9 Principe de Fermat et dioptre sphérique

On considère un dioptre sphérique séparant un milieu d'indice $n$ d'un milieu d'indice $n'$. Le centre C du dioptre se trouve dans le milieu d'indice $n$ et on note S son sommet, avec $R = \overline{\text{SC}}$. Soit A ($p = \overline{\text{SA}}$) un point du milieu objet, situé sur l'axe principal et AI le rayon incident rencontrant le dioptre en I. Le rayon réfracté coupe l'axe en un point A' ($p' = \overline{\text{SA}}$).

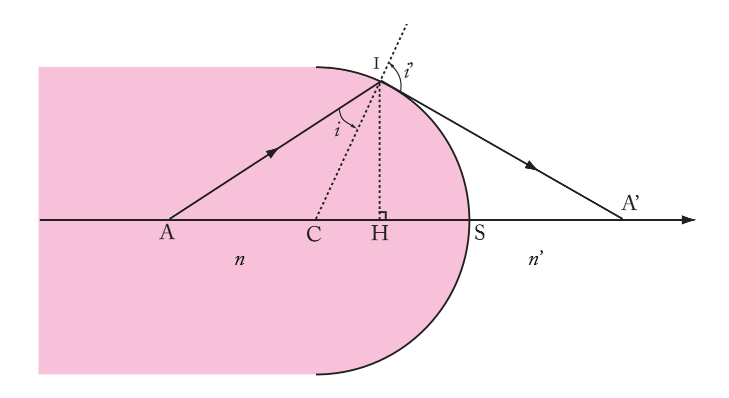
**1. Construire le rayon incident et réfracté si on suppose que A et A' sont réels.**

**2. Soit H la projection de I sur l'axe principal, on pose $x = \overline{\text{SH}}$. Calculer le chemin optique $L$ entre A et A' en fonction des données.**

**3. Montrer que le principe de Fermat permet d'établir une relation de conjugaison pour le dioptre sphérique dans l'approximation des rayons paraxiaux. Que vaut alors le chemin optique entre A et A' ?**

### Solution

**1.** Le schéma est réalisé dans les conditions suivantes : A est placé avant le centre C et $n > n'$. On a ainsi un objet et une image réels.




**2.** Le chemin optique $L$ entre A et A' s'écrit alors :

$$L = n\text{AI} + n'\text{IA'}$$

Pour calculer AI, considérons le triangle AIH, rectangle en H. On a :

$$\text{AI}^2 = \text{AH}^2 + \text{HI}^2$$

Posons $x = \overline{\text{SH}}$ , où H est la projection de I sur l'axe AS.

Dans le triangle CHI, rectangle en H : $\text{HI}^2 = \text{CI}^2 - \text{CH}^2 = R^2 - (-R + x)^2$

Sur l'axe, on a simplement : $\overline{\text{AH}} = -p + x$

On a donc l'expression de AI :

$$\text{AI} = \sqrt{(-p + x)^2 + R^2 - (-R + x)^2} = \sqrt{p^2 + 2x\,(R - p)}$$

On trouve de même pour IA' :

$$\text{AI'} = \sqrt{(-p' + x)^2 + R^2 - (-R + x)^2} = \sqrt{p'^2 + 2x\,(R - p)}$$

On obtient finalement $L$ :

$$L = n\sqrt{p^2 + 2x\,(R - p')} + n'\sqrt{p'^2 + 2x\,(R - p')}$$

**3.** Dans l'approximation paraxiale, les rayons restent proches de l'axe ; le point H est donc voisin de S, soit encore $x << R$. Il vient donc :

$$L = n|p|\sqrt{1 + 2\frac{x}{p}\left(\frac{R}{p} - 1\right)} + n'|p'|\sqrt{1 + 2\frac{x}{p'}\left(\frac{R}{p'} - 1\right)}$$

Dans notre exemple, $p < 0$ et $p' > 0$ ; la relation précédente peut donc s'écrire :

$$L = -np\sqrt{1 + 2\frac{x}{p}\left(\frac{R}{p} - 1\right)} + n'p'\sqrt{1 + 2\frac{x}{p'}\left(\frac{R}{p'} - 1\right)}$$

On peut effectuer un développement limité de $L$, en utilisant $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$ pour $\varepsilon << 1$ :

$$L \approx -np\left(1 + \frac{x}{p}\left(\frac{R}{p} - 1\right)\right) + n'p'\left(1 + \frac{x}{p'}\left(\frac{R}{p'} - 1\right)\right)$$

$$L \approx -np + n'p' + x\left(n - n' - R\left(\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'}\right)\right)$$

Le chemin optique $L$ est indépendant du rayon considéré s'il est indépendant de $x$ soit $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 0$. On obtient :

$$\left(n - n' - R\left(\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'}\right)\right) = 0$$

Cette dernière relation correspond à la relation de conjugaison du dioptre sphérique dans l'approximation paraxiale :

$$\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} = \frac{n - n'}{R}$$

On a alors : $L \approx -np + n'p'$

## Exercice 10 Points de Weierstrass

On considère un dioptre sphérique séparant un milieu d'indice $n$ d'un milieu d'indice $n'$. Le centre C du dioptre se trouve dans le milieu d'indice $n$ et on note S son sommet, avec $R = \overline{SC}$. Soit A ($p = \overline{SA}$) un point du milieu objet, situé sur l'axe principal et AI le rayon incident rencontrant le dioptre en I. Le rayon réfracté coupe l'axe en un point A' ($p' = \overline{SA'}$).

**Calculer les positions des points, dits points de Weierstrass, qui réalisent la condition de stigmatisme rigoureux.**

### Solution

**CONSEIL : l'énoncé de cet exercice vous laisse assez libre du choix de résolution. Nous proposons ici une solution qui s'appuie sur le calcul déjà effectué dans l'exercice précédent, à savoir l'expression du chemin optique.**

Les positions des points de Weierstrass sont repérées par les variables $p$ et $p'$, la variable repérant le rayon incident AI étant, dans l'exercice précédent, notée $x = \overline{SH}$, où H est la projection de I sur l'axe AS. Trouver les valeurs de $p$ et $p'$ réalisant la condition de stigmatisme rigoureux revient à trouver les valeurs de $p$ et de $p'$ telles que la variation $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$ soit rigoureusement nulle quelle que soit la valeur de $x$.

Reprenons l'expression du chemin optique $L$ entre A et B établie dans l'exercice précédent :

$$L = -np\sqrt{1 + 2\frac{x}{p}\left(\frac{R}{p} - 1\right)} + n'p'\sqrt{1 + 2\frac{x}{p'}\left(\frac{R}{p'} - 1\right)}$$

Pour les points de Weierstrass, ce chemin est « rigoureusement » indépendant de la position du point I, c'est-à-dire de $x$. On a :

$$\frac{dL}{dx} = \frac{-n\left(\frac{R}{p} - 1\right)}{\sqrt{1 + 2\frac{x}{p}\left(\frac{R}{p} - 1\right)}} + \frac{n\left(\frac{R}{p'} - 1\right)}{\sqrt{1 + 2\frac{x}{p'}\left(\frac{R}{p'} - 1\right)}}$$

Le stigmatisme rigoureux impose $\frac{dL}{dx} = 0$, quel que soit $x$.
Pour $x = 0$, on obtient la condition (i):

$$n\left(\frac{R}{p} - 1\right) = n'\left(\frac{R}{p'} - 1\right)$$

En supposant cette condition vérifiée, on a alors :

$$\frac{dL}{dx} = n\left(\frac{R}{p} - 1\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{x}{p}\left(\frac{R}{p} - 1\right)}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{x}{p'}\left(\frac{R}{p'} - 1\right)}}\right]$$

Pour que $\frac{dL}{dx}$ soit nul, quel que soit $x$, on doit avoir :

$$\sqrt{1 + 2\frac{x}{p}\left(\frac{R}{p} - 1\right)} = \sqrt{1 + 2\frac{x}{p'}\left(\frac{R}{p'} - 1\right)}$$

Soit la condition (ii):

$$\frac{1}{p}\left(\frac{R}{p} - 1\right) = \frac{1}{p'}\left(\frac{R}{p'} - 1\right)$$

Les conditions (i) et (ii) peuvent se réécrire :

$$\begin{cases} np = n'p' \\ \frac{1}{p}\left(\frac{R}{p} - 1\right) = \frac{1}{p'}\left(\frac{R}{p'} - 1\right) \end{cases}$$

On obtient finalement $p$ et $p'$ qui sont les positions des points de Weierstrass réalisant la condition de stigmatisme rigoureux ($\frac{dL}{dx} = 0$, quel que soit $x$) :

$$p = \left(\frac{n'}{n} + 1\right)R$$

$$p' = \left(\frac{n}{n'} + 1\right)R$$

## Exercice 11 Conditions d'Abbe et de Herschell pour le dioptre sphérique

On considère le dioptre de l'exercice précédent. Les conditions d'Abbe et de Herschell traduisent la conservation du stigmatisme perpendiculairement et suivant l'axe du dioptre.
On considère un objet transverse AB dont l'image à travers le dioptre est A'B' et un objet AD parallèle à l'axe dont l'image à travers le dioptre est A'D'. Les points A et A' sont les points de Weierstrass pour le dioptre. L'angle $\alpha$ (respectivement $\alpha'$) repère l'angle $(\widehat{AA', AI})$ (respectivement $(\widehat{A'A, A'I})$).

**1. On appelle condition d'Abbe la condition pour que le système, rigoureusement stigmatique pour A et A', le soit également pour B et B'. Écrire la condition d'Abbe sous la forme d'une relation entre $n$, $n'$, $\overline{AB}$ , $\overline{A'B'}$, $\alpha$ et $\alpha'$. On utilisera l'expression du chemin optique entre A et A' : $L = n\overrightarrow{AI}\cdot\vec{u} + n'\overrightarrow{IA'}\cdot\vec{u}'$ , où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire portant le rayon incident AI et $\vec{u}'$ le vecteur unitaire portant le rayon réfracté IA' et l'expression du chemin optique $L_B$ entre B et B', B voisin de A : $L_B = L_A + dL$ ; on donnera alors une expression de d$L$.**

**2. La condition de Herschell est la condition pour que le système, rigoureusement stigmatique pour A et A', soit stigmatique pour D et D'. Écrire la condition de Herschell sous la forme d'une relation entre $n$, $n'$, $\overline{AD}$ , $\overline{A'D'}$ , $\alpha$ et $\alpha'$.**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice est un peu difficile car il nécessite d'avoir bien assimilé la notion de chemin optique. On utilisera le fait que les points A et A' sont, par définition, des points conjugués, l'objectif étant de donner une condition pour que des objets étendus au voisinage de A et de A' soient également conjugués.**

**1.** Exprimons le chemin optique $L_A$ entre A et A' sous forme vectorielle ; on note $\vec{u}$ le vecteur unitaire portant le rayon incident AI et $\vec{u}'$ le vecteur unitaire portant le rayon réfracté IA' :

$$L_A = n\overrightarrow{AI}\cdot\vec{u} + n'\overrightarrow{IA'}\cdot\vec{u}'$$

Le chemin optique $L_B$ entre B et B', B voisin de A, s'écrit :

$$L_B = L_A + dL$$

où d$L$ est la variation de chemin optique lorsque A se déplace en B et A' en B', le point

I restant fixe. On a donc $(-\,\mathrm{d}\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB})$ et $(\mathrm{d}\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{A'B'})$ . d$L$ s'écrit :

$$\mathrm{d}L = n\,\mathrm{d}\overrightarrow{AI}\cdot\vec{u} + n'\mathrm{d}\overrightarrow{IA'}\cdot\vec{u}'$$

$$\mathrm{d}L = -\,n\,\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} + n'\overrightarrow{A'B'}\cdot\vec{u}'$$

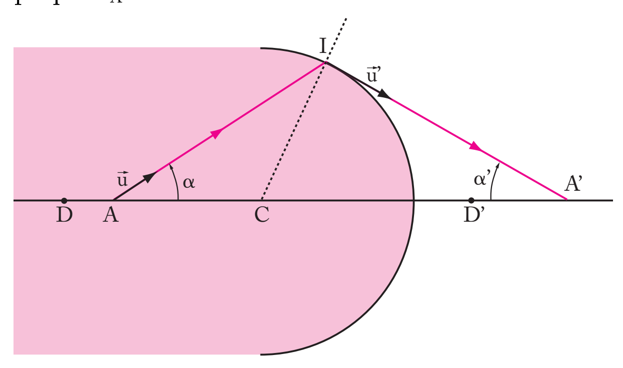
Le chemin optique entre A et A' étant, par définition, constant, le chemin optique entre B et B' le sera également si d$L$ est constant quel que soit le point I, c'est-à-dire quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ . Utilisant les angles $\alpha$ et $\alpha'$, on a :

$$\mathrm{d}L = -n\,\overline{AB}\sin\alpha + n'\overline{A'B'}\sin\alpha' = \mathrm{cte}$$

La relation est valable quels que soient $\alpha$ et $\alpha'$ ; pour $\alpha = \alpha' = 0$, on obtient cte = 0, soit la condition d'Abbe :

$$n\,\overline{AB}\sin\alpha = n'\overline{A'B'}\sin\alpha'$$

**2.** On peut reprendre le raisonnement précédent : le chemin optique $L_C$ s'écrit en fonction du chemin optique $L_A$ :




$$L_C = L_A + \mathrm{d}L$$

$$\mathrm{d}L = n\,\mathrm{d}\overrightarrow{AI}\cdot\vec{u} + n'\mathrm{d}\overrightarrow{IA'}\cdot\vec{u}'$$

$$\mathrm{d}L = -n\,\mathrm{d}\overrightarrow{AD}\cdot\vec{u} + n'\mathrm{d}\overrightarrow{A'D'}\cdot\vec{u}'$$

Utilisant les angles $\alpha$ et $\alpha'$, on a :

$$\mathrm{d}L = -n\overline{AD}\cos\alpha + n'\overline{A'D'}\cos\alpha' = \mathrm{cte}$$

La relation est valable quels que soient $\alpha$ et $\alpha'$ ; pour $\alpha = \alpha' = 0$, on obtient :

$$\mathrm{cte} = -n\overline{AD} + n'\overline{A'D'}.$$

On a donc $-n\overline{AD}(1-\cos\alpha) = n'\overline{A'D'}(1-\cos\alpha')$

On obtient finalement la condition de Herschell :

$$n\overline{AC}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = n'\overline{A'C'}\sin^2\left(\frac{\alpha'}{2}\right)$$

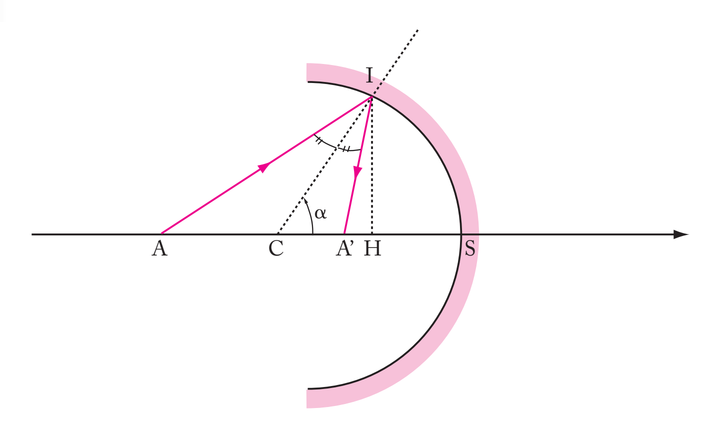
## Exercice 12 Stigmatisme approché d'un miroir sphérique

Soit un miroir sphérique de centre C et de rayon $R$ et soit un point source en A sur l'axe du miroir tel que $\overline{CA} = r$ ; un rayon issu du point A se réfléchit en I sur le miroir, le rayon réfléchi rencontre de nouveau l'axe en A'. On note $\alpha$ l'angle $(\widehat{CS,CI})$ et $\overline{CA'} = r'$.

**1. Calculer le chemin optique $L$ entre A et A' en fonction de $\alpha$, $r$ et $r'$.**

**2. Donner une expression approchée de $L$ lorsque les points A et A' sont proches du centre C du miroir ($|r| << R$ et $|r'| << R$). En déduire que le miroir sphérique présente un stigmatisme approché pour des points symétriques par rapport à C et au voisinage de C.**

### Solution




**1.** Le chemin optique $L$ entre A et A' s'écrit :

$$L = n(\text{AI} + \text{IA'})$$

Notons H la projection de I sur AS. Pour calculer AI, considérons le triangle AIH, rectangle en H ; on a : $\text{AI}^2 = \text{AH}^2 + \text{HI}^2$.

Sur l'axe, on a simplement : $\overline{\text{AH}} = \overline{\text{CH}} - r$

avec $\text{CH} = R\cos\alpha$ et $\text{HI} = R\sin\alpha$

On a donc l'expression de AI :

$$\text{AI} = \sqrt{(R\cos\alpha - r) + R^2\sin^2\alpha} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha}$$

On trouve de même pour IA' :

$$\text{A'I} = \sqrt{(R\cos\alpha - r') + R^2\sin^2\alpha} = \sqrt{R^2 + r'^2 - 2r'R\cos\alpha}$$

On obtient finalement L :

$$L = n\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha} = \sqrt{R^2 + r'^2 - 2r'R\cos\alpha}$$

**2.** Dans le cas où $|r| << R$ et $|r'| << R$, on peut effectuer un développement limité de $L$, en utilisant $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$ pour $\varepsilon << 1$ :

$$L = nR\left(\sqrt{1+\frac{r^2}{R^2}-2\frac{r}{R}\cos\alpha}+\sqrt{1+\frac{r'^2}{R^2}-2\frac{r'}{R}\cos\alpha}\right)$$

$$L \approx nR\left(2-\frac{\cos\alpha}{R}(r+r')+\frac{1}{2R^2}(r^2+r'^2)\right)$$

Le trajet entre A et A' ne dépend pas du rayon choisi si, quel que soit $\alpha$, $L \approx 2nR$ (obtenu à l'ordre 0). On en déduit que cette condition peut être vérifiée au premier ordre si :

$$r + r' = 0$$

La condition de stigmatisme approché est donc obtenue pour des couples de points symétriques par rapport au centre C du miroir. On a alors :

$$L = 2nR + O\left(\frac{r^2+r'^2}{R^2}\right)$$

# Milieux d'indices variables. Mirages

## Exercice 13 Fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique peut être schématisée par un cylindre de révolution d'axe Oz, de rayon $R$, limitée à son entrée par une section droite de centre O. On note $\vec{e}_z$ le vecteur directeur de l'axe Oz. La fibre est constituée d'une matière souple d'indice $n > 1$ et baigne dans l'air. Un rayon lumineux passant par O se propage dans la fibre et rencontre le bord de la fibre pour la première fois en I. On note $\widehat{(\vec{e}_z, \overrightarrow{OI})} = i$. On note $\alpha$ l'angle d'attaque du rayon lorsqu'il rencontre la fibre en O par rapport à la normale à la section de la fibre.

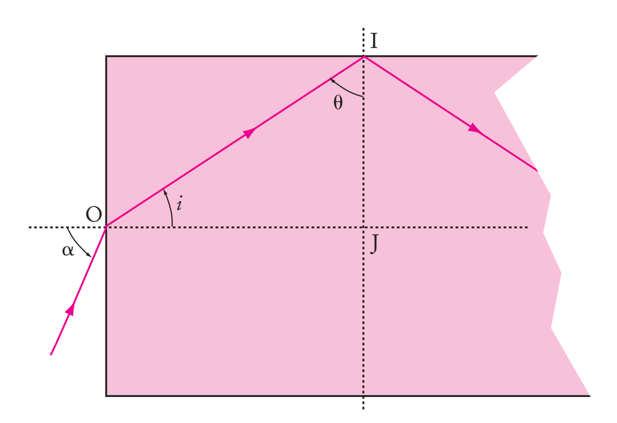
**1. Déterminer la condition sur *i* pour que le rayon soit piégé à l'intérieur de la fibre.**

**2. En déduire l'angle maximal $\alpha_m$.**

### Solution

**CONSEIL : un rayon est dit piégé dans la fibre lorsqu'il ne peut pas en sortir ; a priori, lorsque le rayon rencontre le bord de la fibre, il est partiellement réfléchi dans la fibre et partiellement réfracté hors de la fibre. Le rayon ne sera donc piégé que si le rayon est totalement réfléchi.**

**1.** Le rayon est piégé dans la fibre si aucun rayon n'est réfracté dans l'air, c'est-à-dire si les rayons subissent des réflexions totales dans la fibre. Sur le schéma ci-dessous, il faut donc que le rayon OI subisse une réflexion totale en I. Le rayon rencontrera alors toujours l'interface fibre/air avec le même angle $\theta$ et subira une réflexion totale tout le long de sa propagation dans la fibre. On garantie ainsi que l'intensité de la lumière envoyée dans la fibre est conservée (dans le cas contraire, on constaterait des pertes d'intensité lumineuse à chaque réfraction).




La condition de réflexion totale en I porte sur l'angle θ :

$$n \sin \theta > 1$$

où $n$ est l'indice de la fibre. On a par ailleurs dans le triangle OIJ rectangle en J :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - i$$

La condition de piégeage du rayon se traduit donc sur l'angle $i$ :

$$n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) > 1$$

$$n \cos i > 1$$

La fonction cosinus est décroissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, l'inégalité est donc inversée lorsque l'on applique la fonction arccos à l'inégalité et on a :

$$i < \arccos(1/n)$$

**2.** À l'entrée dans la fibre, on a : $\sin\alpha = n \sin i$

soit,

$$\sin^2\alpha = n^2 \sin^2 i = n^2 (1 - \cos^2 i)$$

D'après la condition de piégeage, $n \cos i > 1$, on a :

$$-n^2 \cos^2 i < -1$$

Soit finalement : $\sin^2\alpha < n^2 - 1$

D'où l'angle maximal $\alpha_m$:

$$\alpha < \arcsin(\sqrt{n^2 - 1}) = \alpha_m$$

## Exercice 14 Fibre optique à indice continûment variable

On assimile une fibre optique à un cylindre de révolution constitué d'un milieu d'indice variable $n$. Le milieu présente une symétrie cylindrique autour de l'axe O$z$ de la fibre. On repère l'espace en coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$. L'indice dépend donc uniquement de la distance $r$ à l'axe : $n = n(r)$.

Soit un rayon lumineux qui se propage dans la fibre et $s$ l'abscisse curviligne le long de ce rayon.

**1. Montrer que la trajectoire admet deux invariants : $a = n\dfrac{dz}{ds}$ et $b = nr^2\dfrac{d\theta}{ds}$.**

**2. Décrire la propagation des rayons méridiens ($b = 0$) et des rayons obliques ($b \neq 0$). Justifier ces dénominations.**

**3. La fibre est caractérisée par la répartition d'indice $n(r)$ suivante : $n(r)$ est variable pour $r \leq R$ et égal à 1 pour $r > R$, $R$ étant le rayon de la fibre. On dit qu'un rayon est guidé s'il ne peut pas sortir de la fibre. Exprimer par une relation entre $R$, $a$ et $b$ la condition de guidage dans la fibre.**

## Solution

**CONSEIL : le problème traité est identique à celui de l'exercice précédent mais le traitement mathématiques est très différent. On considère ici un indice continûment variable $n(r)$ de sorte que la trajectoire des rayons est continûment modifiée par la variation d'indice. Il faut considérer l'équation de propagation des rayons lumineux et l'exprimer en coordonnées cylindriques, adaptée à la géométrie de la fibre ; à partir de cette relation, on obtient les invariants $a$ et $b$ (le calcul n'est pas facile).**

**1.** Reprenons l'équation de propagation des rayons lumineux $\dfrac{dn(\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}(n)$, notée (1). $n$ ne dépend que de $r$ donc la loi de variation de $n = n(r)$ donne $\overrightarrow{\text{grad}}(n) = \dfrac{dn}{dr}\vec{u}_r$. Effectuons le produit scalaire de l'équation de propagation des rayons lumineux par le vecteur $\vec{u}_Z$, il vient :

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} \cdot \vec{u}_Z = \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \vec{u}_Z$$

Or

$$\overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \vec{u}_Z = \frac{dn}{dr}\vec{u}_r \cdot \vec{u}_Z = 0$$

On a donc $\dfrac{d(n\vec{u})}{ds} \cdot \vec{u}_z = 0$. $\vec{u}_z$ étant constant, on peut le rentrer dans la dérivée, d'où :

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} \cdot \vec{u}_Z = \frac{d(n\vec{u} \cdot \vec{u}_Z)}{ds} = 0$$

On en déduit que la quantité $n\vec{u} \cdot \vec{u}_Z$ est constante.

Exprimons maintenant le vecteur $\vec{u}$ en fonction de la position du rayon (repérée en coordonnées cylindriques) :

$$\vec{u} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \frac{dr}{ds}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{ds}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{ds}\vec{u}_Z$$

On a finalement : $n\vec{u} \cdot \vec{u}_Z = n\dfrac{dz}{ds} = a$, où $a$ est une constante.

Reprenons l'équation de propagation des rayons et remarquons que :

$$\vec{r} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}(n) = (r\vec{u}_r + z\vec{u}_Z) \wedge \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r = z\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\vec{u}_\theta$$

On a donc, en effectuant le produit scalaire par $\vec{u}_Z$ : $(\vec{r} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)) \cdot \vec{u}_Z = 0$. Remarquons alors que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{r} \cdot n\vec{u}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} \wedge n\vec{u} + \vec{r} \wedge \frac{\mathrm{d}(n\vec{u})}{\mathrm{d}s} = \vec{r} \wedge \frac{\mathrm{d}(n\vec{u})}{\mathrm{d}s}$$

car
$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} \wedge n\vec{u} = \vec{u} \wedge n\vec{u} = \vec{0}$$

On a donc :

$$\vec{r} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}(n) = \vec{r} \wedge \frac{\mathrm{d}(n\vec{u})}{\mathrm{d}s} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{r} \wedge n\vec{u}) = z\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\vec{u}_\theta$$

Par suite, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{r} \wedge n\vec{u}) \cdot \vec{u}_Z = 0$, et en rentrant à nouveau $\vec{u}_Z$ dans la dérivée, on en déduit que $(\vec{r} \wedge n\vec{u}) \cdot \vec{u}_Z$ est constant.

La composante suivant $z$ du vecteur $(\vec{r} \wedge n\vec{u})$ s'écrit $r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$, d'où on déduit le second invariant : $nr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = b$, où $b$ est une constante.

**2.** Les rayons méridiens vérifient $nr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = 0$, soit θ constante. Les rayons se déplacent dans un plan méridien. Les rayons obliques sont tels que $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{b}{nr^2}$ garde un signe constant. Ces rayons s'enroulent autour de l'axe Oz.

**3.** Un rayon lumineux est piégé dans la fibre si, lorsqu'il parvient sur la surface, en $r = R$, il subit une réflexion totale. Le rayon est réfléchi si la loi de Descartes pour la réfraction (conservation de la composante tangentielle de $n\,\vec{u}$ à la traversée de l'interface) ne peut pas être satisfaite, soit, avec $\vec{u}_r$ la normale à l'interface sur la surface de la fibre, si :

$$n(R)\left|\vec{u} \wedge \vec{u}_r\right| > 1$$

Or $\vec{u} \wedge \vec{u}_r = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\vec{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\vec{u}_Z\right) \wedge \vec{u}_r = -r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\vec{u}_z + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\vec{u}_\theta$, la condition de réflexion totale s'écrit donc :

$$R^2\left(n(R)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(n(R)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2 > 1$$

On reconnaît les constantes $a = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ et $b = nr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$, d'où la condition sur $R$, $a$ et $b$ :

$$\frac{b^2}{R^2} + a^2 > 1$$

## Exercice 15 Équation des rayons lumineux dans un milieu non homogène. Mirage

Soit un milieu non homogène isotrope, d'indice $n$ (M) variable continûment selon la position du point M considéré. Un même rayon lumineux passe par M et M', point infiniment voisin de M. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent en M au rayon lumineux et $d(n\vec{u})$ le vecteur accroissement du vecteur $n\vec{u}$ entre M et M'.

**1. Justifier que $d(n\vec{u})$ est parallèle à $\overrightarrow{grad}\, n$.**

**2. Montrer que $\dfrac{d(n\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{grad}\, n$, où $s$ est l'abscisse curviligne le long du rayon.**

**3. Montrer que la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu non homogène est identique à la trajectoire d'une particule de vitesse $\vec{v} = v_0(n\vec{u})$ et subissant une accélération $\vec{a}$ dont on donnera l'expression en fonction de $v_0$ et $n$. On prendra $v_0$ constante.**

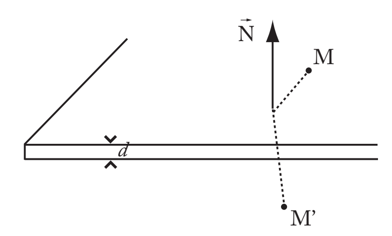
En été, l'air au contact du sol est plus chaud qu'en altitude et il y a apparition d'un gradient d'indice. Pour décrire ce phénomène, on prend un gradient d'indice tel que $\overrightarrow{grad}(n^2)$ soit constant et non nul, et qu'il soit vertical et orienté vers le haut.

**4. Montrer que, dans certaines conditions, il existe deux rayons lumineux allant d'un point A à un point B. Peut-on parler de mirage ?**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice est difficile. Il s'agit de travailler sur l'équation donnant la trajectoire d'un rayon lumineux en milieu d'indice continûment variable.**

**1.** $\overrightarrow{grad}(n)$ est, par définition, perpendiculaire aux surfaces iso-indices ou iso-$n$ (ensemble des points auxquels est associée une même valeur de $n$). Considérons que M et M' appartiennent à deux milieux d'indice $n$(M) et $n$(M'), séparés par une couche (interface) dans laquelle $n$ varie de $n$(M) à $n$(M'). La normale $\vec{N}$ à l'interface est colinéaire à $\overrightarrow{grad}(n)$ puisque $n$ ne varie que dans l'interface d'épaisseur $d$.




Par ailleurs, les lois de l'optique géométrique traduisent la continuité de la composante tangentielle du vecteur $n\vec{u}$. On a donc : $n(M')\,\vec{u}(M') - n(M)\,\vec{u}(M) = a\vec{N}$, où $a$ est une constante. Cette relation reste valable lorsque M et M' sont sur la couche d'épaisseur $d$, soit lorsque le milieu est inhomogène.

Par ailleurs, lorsque M et M' sont infiniment voisins, on a $n(\mathrm{M'})\vec{\mathrm{u}}(\mathrm{M'}) - n(\mathrm{M})\vec{\mathrm{u}}(\mathrm{M})$ $= \mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}})$ ; on a donc $\mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}})$ parallèle à $\vec{\mathrm{N}}$. Il vient finalement $\mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}})$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$ parallèles.

**2.** Établir la relation $\frac{\mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}})}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$ revient à chercher la constante de proportionnalité entre $\mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}})$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$ qui sont parallèles, comme nous l'avons montré. Soit $b$ cette constante : $\mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}}) = b\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$

Avec $\mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}}) = \mathrm{d}n\vec{\mathrm{u}} + n\mathrm{d}\vec{\mathrm{u}}$ et en multipliant l'égalité $\mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}}) = b\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$ par $\vec{\mathrm{u}}\mathrm{d}s$ $= \overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}$, il vient :

$$\mathrm{d}n\,\vec{\mathrm{u}}\cdot\vec{\mathrm{u}}\mathrm{d}s + n\mathrm{d}\vec{\mathrm{u}}\cdot\vec{\mathrm{u}}\mathrm{d}s = b\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)\vec{\mathrm{u}}\mathrm{d}s$$

avec $\vec{\mathrm{u}}\cdot\vec{\mathrm{u}} = 1$, $\vec{\mathrm{u}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{u}} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)\,.\,\vec{\mathrm{u}}\mathrm{d}s = \mathrm{d}n$, on a $\mathrm{d}s = b$.
On en déduit finalement l'équation de propagation des rayons :

$$\frac{\mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}})}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$$

**3.** On assimile le rayon lumineux à une particule de masse $m$ et de vitesse $\vec{v} = v_0 n\vec{\mathrm{u}}$. Son accélération $\vec{\gamma}$ s'écrit :

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0\frac{\mathrm{d}(n\vec{\mathrm{u}})}{\mathrm{d}s}v_0 n = v_0^2\, n\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n)$$

en utilisant l'équation de propagation des rayons et la définition de la vitesse : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v = v_0 n$. On obtient finalement :

$$\vec{\gamma} = v_0^2\, n\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n) = \frac{v_0^2}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n^2)$$

Poursuivons l'analogie avec la mécanique classique et cherchons l'équation de la trajectoire du ou des rayons qui, issus d'un point objet A, arrivent au point B (où l'œil se trouve). Le gradient d'indice est tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n^2)$ soit constant, soit $n^2(y) = ay + b$, où $y$ désigne la coordonnée suivant un axe vertical ascendant (avec $a > 0$), de sorte que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(n^2) = a\vec{\mathrm{j}}$ et par suite :

$$\vec{\gamma} = \frac{v_0^2}{2}a\vec{\mathrm{j}}$$

Intégrons cette équation (deux fois) :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_A \cos\alpha \\ \frac{v_0^2}{2} at + v_A \sin\alpha \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A \cos\alpha t \\ \frac{v_0^2}{4} at^2 + v_A \sin\alpha t \end{bmatrix}$$

où $v_A$ est la vitesse du rayon en A, $\alpha$ l'angle qu'elle forme avec l'axe $A\vec{i}$ et $(x,y)$ repère la trajectoire du rayon lumineux. Éliminons le temps pour donner l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{v_0^2}{4v_A^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha x$$

Remarquons que $\frac{v_0^2}{v_A^2} = \frac{1}{n_A^2}$ et que A étant l'origine du repère, on a $n_A^2 = b$, de sorte que l'équation de la trajectoire s'écrit :

$$y = \frac{a}{4b\cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha x$$

**4.** La condition pour que le rayon lumineux issu de A arrive en B de coordonnées $(X,Y)$ est qu'il existe au moins une valeur de l'angle $\alpha$ telle que :

$$-Y + \frac{a}{4b\cos^2\alpha} X^2 + \tan\alpha X = \frac{aX^2}{4b}\tan^2\alpha + X\tan\alpha + \frac{aX^2}{4b} - Y = 0$$

Cette équation admet des solutions pour $\tan\alpha$ (et donc pour $\alpha$) si :

$$X^2 - 4\frac{aX^2}{4b}\left(\frac{aX^2}{4b} - Y\right) \geq 0$$

Soit si :

$$Y \geq \frac{a}{4b}X^2 - \frac{b}{a}$$

L'égalité donne l'équation de la parabole de sécurité de sommet $\left(x_s = 0,\ y_s = -\frac{b}{a}\right)$ tournant sa concavité vers les $y > 0$. Pour tous les points dans la concavité de cette parabole, il existe deux rayons issus de A et parvenant au point B. L'œil en B pourra donc voir deux images de A (aucune ne correspondant à la position réelle de A) ; en ce sens, on peut parler de mirage.

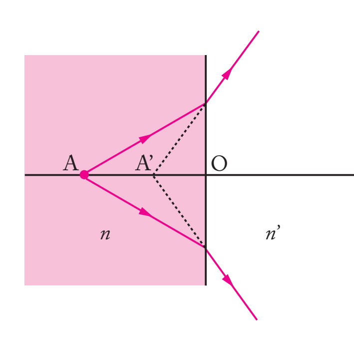
# Dioptres dans l'approximation de Gauss

Un peu d'histoire

## La « mythologie » de l'arc-en-ciel

Les Grecs voit dans l'arc-en-ciel l'écharpe d'Iris, « messagère des dieux à la ceinture multicolore », dont la fonction est de mettre en relation le Ciel et la Terre.
Selon la Bible, l'arc-en-ciel est le sceau apposé au contrat fait par Dieu à Noé en reconnaissance du travail accompli et en signe de promesse qu'il n'y aura jamais plus de déluge. Si aujourd'hui, l'arc-en-ciel continue à apparaître, c'est justement pour rappeler cette promesse.
En Inde, l'arc-en-ciel, lien entre le monde des hommes et celui des dieux, est symbolisé par des rinceaux terminés par des têtes de monstres marins (*makara*).
Dans les anciennes croyances nordiques, on trouve l'arc-en-ciel divinisé sous le nom de Bifrost, pont qui mène du monde des hommes à celui des dieux.

## 1. Relations de conjugaison des dioptres




### 1.1. Dioptre plan

La relation de conjugaison d'un dioptre plan, déduite des lois de Descartes ou du principe de Fermat, s'écrit dans l'approximation paraxiale :

$$\frac{\overline{OA}}{n} - \frac{\overline{OA'}}{n'} = 0$$

Le grandissement transverse du dioptre plan est égal à 1.

### 1.2. Dioptre sphérique

La relation de conjugaison d'un dioptre sphérique peut s'exprimer avec différentes origines.

- origine au sommet :

$$\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n - n'}{\overline{SC}}$$

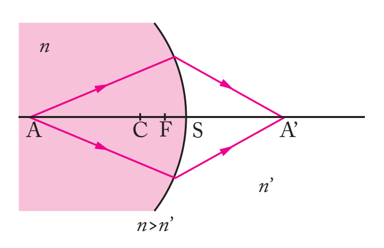
- origine au centre :

$$\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n - n'}{\overline{CS}}$$

- origine aux foyers :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{FS} \cdot \overline{F'S}$$

avec $\overline{SF} = \frac{n}{n - n'}\overline{SC}$ et $\overline{SF'} = \frac{n}{n' - n}\overline{SC}$




Le grandissement transverse est donné par :

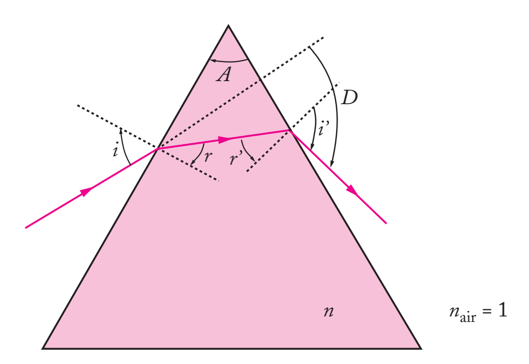
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n\overline{SA'}}{n'\overline{SA}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}}$$

### 1.3. Relations du prisme

Les formules du prisme s'écrivent :

$$A = r + r'$$
$$D = i + i' - A$$

La déviation $D$ passe par un minimum $D_m = 2\ \arcsin(n \sin(\frac{A}{2})) - A$ lorsque $r = r' = \frac{A}{2}$.



# Dioptres plans

## Exercice 1 Translation par une lame à faces parallèles

Une lame de verre d'indice $n$ et d'épaisseur $e$ est plongée dans l'air. Un rayon arrive dans l'air sur la lame avec un angle d'incidence $i$ par rapport à la normale à la lame. On rappelle que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

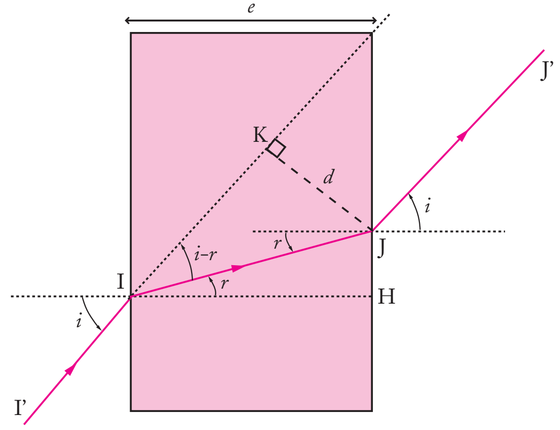
**1. Montrer que le rayon émergeant de la lame est parallèle au rayon incident.**

**2. Calculer la distance entre ces deux rayons, notée *d*, en fonction de *e*, *i* et *n*.**

### Solution

**CONSEIL :** **la difficulté de cet exercice réside dans la mise en forme du problème posé. Ainsi, dans la première question, il faut traduire la condition de parallélisme de deux droites, le plus simple étant de repérer, par exemple, la direction des droites par l'angle qu'elles font avec la normale à l'interface : dès lors, deux droites (deux rayons) sont parallèles si elles forment le même angle avec une direction donnée. Dans la question 2, on demande de calculer la distance entre deux droites (ou deux rayons) parallèles : cette distance correspond à la longueur du segment qui les coupent perpendiculairement.**

**1.**




Représentons sur un schéma le chemin du rayon (en traits pleins) à travers la lame.
Le rayon arrive en I sur la lame avec un angle d'incidence égal à $i$. Il est réfracté dans la lame avec un angle $r$ suivant la loi de Descartes : $\sin i = n \sin r$.
Le rayon se propage dans la lame et arrive en J à l'interface (dioptre plan) verre/air avec l'angle d'incidence $r$ et est réfracté dans l'air avec un angle $i'$ suivant la loi de Descartes :

$$n \sin r = \sin i'$$

Les deux relations donnent $\sin i = \sin i'$, soit pour des angles aigus :

$$i' = i$$

Le rayon émergeant de la lame est parallèle au rayon incident.

**2.** On cherche la distance $d$ entre les deux rayons parallèles, le rayon incident et le rayon émergent. En absence de lame, le rayon suit la trajectoire IK (en pointillé) ; en présence de la lame, il sort suivant JJ', translaté par rapport à sa direction initiale II'. La distance entre le rayon non dévié IK et le rayon dévié par la lame JJ' est $d = \text{JK}$.

$d$ est calculé dans le triangle IJK, rectangle en K :

$$d = \mathrm{JK} = \mathrm{IJ}\sin(i - r).$$

Par ailleurs, dans le triangle IJH rectangle en H, on a :

$$\mathrm{IJ} = \frac{\mathrm{HI}}{\cos r} = \frac{e}{\cos r}$$

$$d = e\frac{\sin(i-r)}{\cos r} = e\frac{\sin i \cdot \cos r - \sin r \cdot \cos i}{\cos r}$$

On élimine $r$ de cette expression :

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n}$$

On a donc :

$$d = e\left(\sin i - \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \cdot \cos i\right) = e\sin i\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

## Exercice 2 Distance apparente d'un poisson dans un aquarium

Un observateur regarde un poisson nager dans un aquarium contenant de l'eau d'indice $n = \frac{4}{3}$. Le poisson se trouve à la distance $h$ = 20 cm d'une des faces de la vitre. On négligera dans les calculs l'épaisseur de la paroi de l'aquarium.

**1. À quelle distance $h'$ de la vitre l'observateur voit-il le poisson ?**

**2. Déterminer le rapprochement relatif $\frac{h'-h}{h}$.**

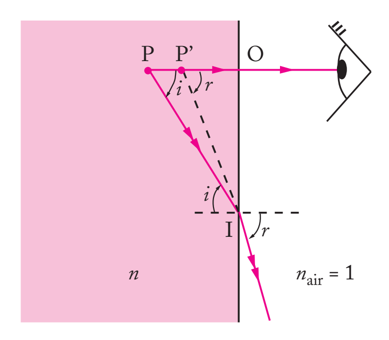
### Solution

**CONSEIL : pour résoudre ce problème, il faut bien comprendre ce que signifie « voir un objet » pour un observateur. Dans l'air, un observateur voit les objets à l'endroit où ils sont vraiment ; en effet, le cône lumineux, formé des rayons émis par l'objet, arrive à l'œil qui « localise » l'objet au sommet du cône. Pourquoi n'est-ce pas le cas lorsque l'observateur est dans l'air et l'objet est dans l'eau ? Parce que dans ce cas, il existe une interface (dioptre) entre les deux milieux. Les rayons lumineux émis par l'objet et arrivant à l'observateur sont donc déviés par l'interface ; le cône lumineux arrivant à l'observateur a son sommet en un point différent du point objet et l'œil « voit » l'objet en ce point. Autrement dit, l'observateur « voit » l'objet à un point qui correspond en fait à l'image géométrique de l'objet à travers le dioptre.**

**1.** La figure ci-dessous représente deux des rayons issus du poisson et arrivant à l'œil.

Le rayon issu du poisson en P arrive en incidence normale à la paroi de l'aquarium (dioptre eau/air). Il est réfracté dans l'air sans être dévié (rayon PO). Un rayon incident en I avec un angle $i$ est réfracté dans l'air avec un angle $r$ tel que :

$$n\sin i = \sin r$$




L'œil reçoit un faisceau conique divergent de sommet P', image du poisson en P à travers le dioptre. L'œil voit le poisson en P'. La distance apparente $h'$ de P' à la paroi de l'aquarium est calculée en utilisant les triangles OIP et OIP':
Dans le triangle OIP, l'angle $(\widehat{OPI}) = i$, donc $h \tan i = OI$
Dans le triangle OIP', l'angle $(\widehat{OP'I}) = r$, donc $h' \tan r = OI$
Dans l'approximation des faibles angles, $\sin i \approx \tan i \approx i$. On a donc :

$$\frac{nOI}{h} = \frac{OI}{h'}$$

Finalement, on obtient :

$$h' = \frac{h}{n} = 15\,\text{cm}$$

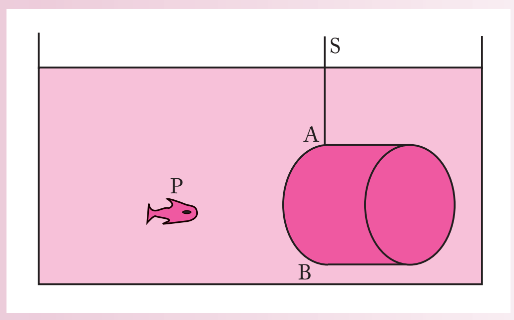
Remarquons que nous pouvions utiliser directement la relation de conjuguaison du dioptre plan.

**2.** Le rapprochement relatif est donc égal à :

$$R = \frac{h' - h}{h'} = \frac{n-1}{n} = 25\ \%.$$

## Exercice 3 Pêche au poisson

Un enfant essaie d'attraper un poisson rouge dans un aquarium. Il dispose d'un cerceau de diamètre AB, muni d'une tige, dont la longueur immergée SA est de 15 cm de long, et qui est prolongée par un filet comme l'indique la figure.




À chaque tentative, il déplace le cerceau horizontalement donc la longueur de tige immergée est toujours de 15 cm. L'enfant sait que l'image du poisson est plus proche de la

surface de l'eau que la position réelle du poisson. Il en conclut que s'il voit l'image du poisson à 15 cm au-dessous de la surface de l'eau, il sera certain de l'attraper et effectue donc une tentative de capture. L'indice optique de l'eau est $n = \frac{4}{3}$.

**1. À quelle distance de la surface de l'eau le poisson se trouve-t-il réellement lorsque son image est vue à 15 cm de la surface de l'eau ?**

**2. Quel doit être le diamètre minimal du cerceau pour que l'enfant réussisse son opération ?**

## Solution

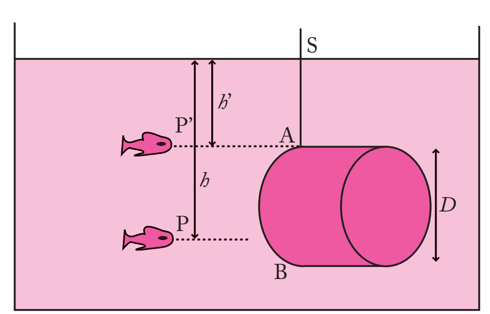
**CONSEIL : ce problème est, dans l'esprit, identique au précédent. On suppose que l'enfant plonge sa tige, non pas à la profondeur à laquelle le poisson est réellement mais à la profondeur à laquelle il le « voit », c'est-à-dire à l'endroit de l'image du poisson à travers le dioptre eau/air.**

**1.** D'après l'exercice précédent, si on note $h$ la distance du poisson à la surface de l'eau, la distance $h'$ de l'image P' du poisson à la surface s'écrit : $h' = \frac{h}{n}$ .

On a donc $h = nh' = 20$ cm.

**2.** L'enfant se repère par rapport à l'image P' du poisson. Lorsque $h' = 15$ cm, il tente d'attraper le poisson en P. Pour que sa pêche soit fructueuse, il faut que le cerceau ait un diamètre $D$ supérieur à $(h - h')$ (voir figure). On a donc :

$$D > h - h' = 5 \text{ cm}.$$




$D > h\text{-}h'$, le poisson sera attrapé

## Exercice 4 Objet accolé à une lame de verre

On observe un objet ponctuel A à travers une lame de verre à faces parallèles dont l'indice de réfraction est $n$ et l'épaisseur $e$. L'objet A est en contact avec un bord de la lame. On suppose les angles réfractés et réfléchis petits. On rappelle que si les angles sont supposés petits alors $\sin i \approx \tan i \approx i$.

**1. Faire une construction géométrique.**

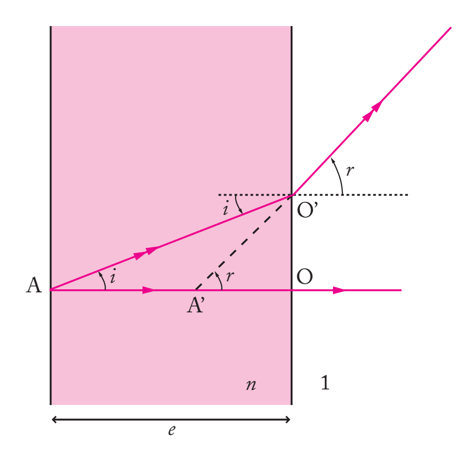
**2. Où se forme le point A' par rapport à A ?**

## Solution

**CONSEIL : cet exercice ne pose pas de difficulté majeure. Il s'agit de déterminer l'image d'un objet à travers une lame à faces, c'est-à-dire une succession de deux dioptres. Petite astuce : l'objet est accolé à la lame,**

**de sorte que tout se passe comme si l'objet était dans un milieu d'indice *n*, à la distance *e* du dioptre séparant le milieu d'indice *n* de l'air. On se ramène à l'étude de l'image d'un objet à travers un seul dioptre et non deux comme on pourrait le croire en première lecture.**

**1.**




**2.** Le rayon AO' émerge dans l'air d'indice égal à 1, on écrit donc la relation entre les angles d'incidence et de réfraction :

$$n \sin i = \sin r$$

Dans l'approximation des faibles angles, $ni \approx r$. Calculons la distance AA' et pour cela posons $d = \text{OO'}$.

Dans le triangle OO'A, $\tan i = \dfrac{d}{e}$

Dans le triangle OO'A', $\tan r = \dfrac{d}{e - \text{AA'}}$

Pour de faibles angles, on obtient $i \approx \dfrac{d}{e}$ et $r \approx \dfrac{d}{e - \text{AA'}}$.

D'où

$$e - \text{AA'} \approx \frac{d}{r} \approx \frac{d}{ni} \approx \frac{e}{n}$$

On trouve finalement :

$$\text{AA'} = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

La position du point A' face à l'observateur est avancée par rapport au point A.

## Exercice 5 Image d'un objet à travers deux liquides

Une cuve contient une couche d'eau de 20 cm d'épaisseur et d'indice 1,33 et une couche de benzène d'épaisseur 10 cm et d'indice 1,48 (on suppose les deux liquides non miscibles).

Un observateur dont l'œil est à 25 cm au-dessus de la surface libre du benzène regarde presque verticalement un petit objet A, au fond de la cuve. On rappelle que l'eau est plus dense que le benzène.

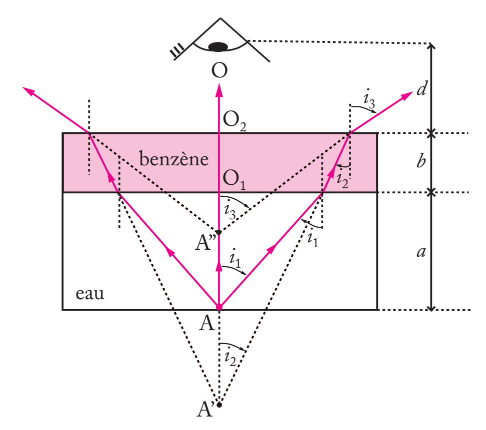
**1. Tracer la marche d'un pinceau lumineux issu de A.**

**2. À quelle distance l'objet A paraît-il être de l'observateur ?**

## Solution

**CONSEIL : cet exercice est, dans l'esprit, identique au précédent : il s'agit de déterminer l'image d'un objet à travers une succession de deux dioptres.**

**1.** L'eau étant plus dense que le benzène, le benzène se situe donc au-dessus de l'eau. L'image du point A par le dioptre eau/benzène est notée A'. L'image définitive A" de A à travers le système formé des deux liquides est l'image de A' par le dioptre benzène/air. On note $n_1$ l'indice de l'eau, $n_2$ l'indice du benzène et $n_3$ l'indice de l'air (pris égal à 1). Traçons la marche d'un rayon issu de A à travers le système. À chaque interface, on applique la loi de réfraction de Descartes.




**2.** Dans le triangle $AIO_1$, on a $\tan i_1 = \dfrac{\overline{O_1I}}{\overline{O_1A}}$.

Dans le triangle $A'IO_1$, on a $\tan i_2 = \dfrac{\overline{O_1I}}{\overline{O_1A'}}$.

L'observateur est à la verticale de l'objet A, donc les rayons lui parvenant font un angle faible avec la verticale et l'on peut se placer dans l'approximation des faibles angles. On peut alors écrire $\tan i \approx \sin i$. La loi de Descartes pour la réfraction du rayon incident sur l'interface eau/benzène s'écrit : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ ; on a donc :

$$n_1 \frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_1A}} \approx n_2 \frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_1A'}}$$

Soit :

$$\frac{n_1}{\overline{O_1A}} \approx \frac{n_2}{\overline{O_1A'}}$$

On retrouve, bien sûr, la formule de conjuguaison pour le dioptre eau/benzène.

Le même raisonnement s'applique pour l'objet A' qui donne, à travers le dioptre benzène/air l'image A''. Dans le triangle A'J$O_2$, on a $\tan i_2 = \dfrac{\overline{O_2J}}{\overline{O_2A'}}$ et dans le triangle A''J$O_2$, on a

$\tan i_3 = \dfrac{\overline{O_2J}}{\overline{O_2A''}}$

La loi de Descartes pour la réfraction du rayon incident sur l'interface eau/benzène s'écrit $n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3$ ; on a donc :

$$n_2 \frac{\overline{OJ}}{\overline{O_2A'}} \approx n_2 \frac{\overline{O_2J}}{\overline{O_2A''}}$$

Soit

$$\frac{n_2}{\overline{O_2A'}} \approx \frac{n_3}{\overline{O_2A''}}$$

La distance apparente à laquelle l'œil voit l'image de A à travers les deux liquides est la distance $\overline{OA''}$. On a :

$$\overline{OA''} = \overline{OO_2} + \overline{O_2A''} = \overline{OO_2} + \frac{n_3}{n_2}\overline{O_2A'}$$

$$\overline{OA''} = \overline{OO_2} + \frac{n_3}{n_2}(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A'}) = \overline{OO_2} + \frac{n_3}{n_2}\left(\overline{O_2O_1} + \frac{n_2}{n_1}\overline{O_1A}\right)$$

Il vient finalement :

$$\overline{OA''} = d + \frac{n_3}{n_2}b + \frac{n_3}{n_1}a$$

Avec $a$ = 20 cm, $b$ = 10 cm, $d$ = 25 cm, $n_1$ = 1,33, $n_2$ = 1,48 et $n_3$ = 1, on calcule :

$$\overline{OA''} = d + \frac{n_3}{n_2}b + \frac{n_3}{n_1}a = 46,8\text{cm}.$$

## Exercice 6 Tige partiellement immergée dans l'eau

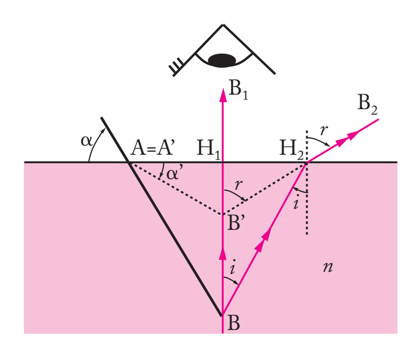
Une tige rectiligne est partiellement immergée dans l'eau ($n$ = 1,33). Elle fait un angle $\alpha = 45°$ avec la surface libre du liquide.

**Montrer qu'un observateur situé au-dessus de l'eau et regardant presque verticalement voit l'image de la partie immergée de la tige faisant un angle $\alpha'$ avec la surface libre de l'eau. Calculer $\alpha'$.**

### Solution

**CONSEIL :** cet exercice consiste à déterminer simplement l'image de la partie immergée de la tige à travers le dioptre eau/air. Si on sait déterminer l'image d'un point objet, il faut se demander quelle est la forme de l'image d'un segment. Deux méthodes de résolution sont possibles pour répondre à cette question : la première méthode consiste à considérer l'image de chaque point du segment (un point du segment est repéré par $y = x \tan\alpha$, si $x$ est l'horizontale et $y$ la verticale) ; la seconde, que nous proposons ici, consiste à admettre que l'image d'un segment [AB] est un segment [A'B'], où A' est l'image de A et B' l'image de B. Bien sûr, nous vous encourageons à vérifier cette propriété en optant pour la première méthode !

Considérons la partie AB immergée de la tige. L'observateur dans l'air ne voit pas AB mais A'B', image de AB à travers le dioptre eau/air. A étant sur le dioptre, il coïncide avec son image A'. La construction de B' se fait en traçant le chemin de deux rayons issus de B et parvenant à l'œil : le rayon $BH_1B_1$ perpendiculaire à la surface libre n'est pas dévié au passage du dioptre et le rayon $BH_2B_2$ subit une réfraction suivant la loi de Descartes : $n \sin i = \sin r$.




On remarque alors que :

- dans le triangle $BH_1H_2$, $BH_1 = \dfrac{H_1H_2}{\tan i}$ ;

- dans le triangle $B'H_1H_2$, $B'H_1 = \dfrac{H_1H_2}{\tan r}$.

Dans l'approximation des faibles angles, $\tan r \approx \sin r$ et $\tan i \approx \sin i$, d'où :

$$B'H_1 = \frac{BH_1}{n}$$

Par ailleurs, on a :

- dans le triangle $BAH_1$, $\tan\alpha = \dfrac{BH_1}{AH_1}$;

- dans le triangle $B'AH_1$, $\tan\alpha' = \dfrac{B'H_1}{AH_1}$.

On a donc finalement :

$$\tan\alpha' = \frac{\tan\alpha}{n}$$

A.N. $\alpha' = 37°$.

## Exercice 7 À la pêche...

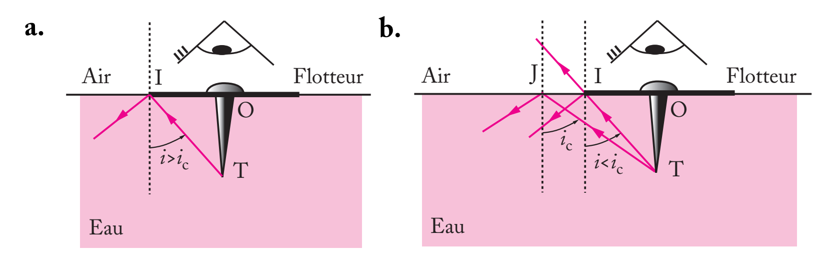
Un flotteur de pêche est formé d'un disque de rayon $R$ au centre duquel on plante un clou de longueur $h$. Le disque est placé dans l'eau, d'indice $n = 1{,}33$ (le clou est immergé).

**À quelle condition le clou est-il invisible pour un observateur dans l'air ?**

**Solution**

**CONSEIL : cet exercice comprend une difficulté : il faut traduire l'énoncé et comprendre ce que signifie, en termes de rayons lumineux, le fait que le clou soit invisible par un observateur situé dans l'air.**

Le clou émet des rayons lumineux ; si un rayon lumineux émis par le clou parvient à l'œil de l'observateur, alors le clou sera visible. Pour que cela ne soit pas le cas, il faut qu'aucun rayon émis par le clou ne parvienne à l'œil. Comment cela est-il possible ? Comment un rayon, émis par un point dans l'eau vers la surface de l'eau, peut ne pas traverser la surface, c'est-à-dire ne pas atteindre l'œil ? Il faut bien sûr que tous les rayons émis par le clou soient réfléchis par la surface (dioptre eau/air). S'il n'y avait pas le disque flottant, cela ne serait pas possible (il suffit de remarquer que le rayon arrivant en incidence normale à la surface de l'eau est toujours réfracté dans l'air) ; ici, les seuls rayons qui peuvent être réfractés dans l'air sont ceux qui ne rencontrent pas le disque (les autres sont réfléchis ou absorbés par le disque). C'est donc sur ces rayons qu'il faut mener le raisonnement et traduire la condition de réflexion totale.
Le clou est totalement invisible dès que l'on ne voit plus son extrémité. Un observateur dans l'air verra l'extrémité T du clou si les rayons issus de T sont réfractés dans l'air (b). Le cas contraire correspond à la réflexion totale des rayons incidents sur le dioptre eau/air : dans ce cas, l'œil ne reçoit aucuns rayons issus de T (a).
Remarquons que le rayon issu de T et rencontrant l'interface en I, extrémité du disque, joue un rôle particulier : c'est le rayon arrivant à l'interface avec l'angle d'incidence minimum. Ceux qui arrivent entre O et I sont absorbés par le disque, ceux qui arrivent à droite de I ont un angle d'incidence supérieur. Si le rayon TI est totalement réfléchi ($i > i_c$), il en est donc de même pour tous les rayons issus de T. En revanche, si le rayon issu de T est réfracté dans l'air ($i < i_c$), il existe un faisceau de lumière issu de T, compris entre TI et TJ, qui est réfracté dans l'air.




L'observateur voit le clou si TI est réfracté, ce qui se traduit par une condition sur l'angle $i = (\widehat{OTI})$ :

$$n \sin i < 1$$

Dans le triangle OTI, on a :

$$\sin i = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

La condition s'écrit finalement :

$$h > R\sqrt{n^2 + 1}\,.$$

Donc le clou sera totalement invisible si sa longueur $h$ est telle que :

$$h \leq R\sqrt{n^2 + 1}.$$

## Exercice 8 Position du Soleil vu par un poisson

Les rayons du Soleil couchant viennent frapper la surface d'un lac sous une incidence égale à 90°. On assimile l'air au vide d'indice égal à 1 et on prend l'indice de l'eau $n = 4/3$. Un faisceau étroit de rayons est reçu par un poisson.

**1. Quelle est pour un poisson dans le lac la direction apparente du Soleil qui se couche ?**

**2. Existe-t-il une position du Soleil pour laquelle sa direction apparente pour le poisson coïncide avec sa direction réelle ?**

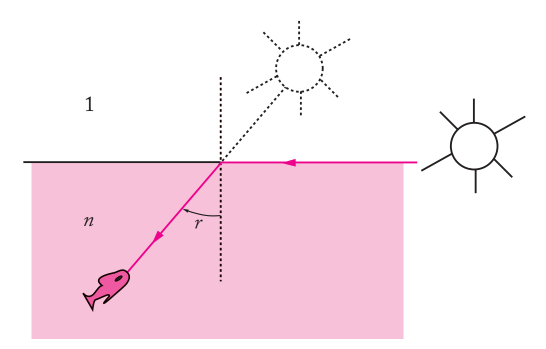
### Solution

**CONSEIL : cet exercice ne pose pas de difficulté majeure. Les rayons lumineux émis par le Soleil couchant (dans l'air) sont parallèles à la surface de l'eau du lac, qui constitue un dioptre air/eau. Ces rayons sont donc réfractés dans l'eau avec un angle de réfraction qui correspond, pour un observateur dans l'eau (le poisson !) à la direction apparente du Soleil.**

**1.** Le faisceau parallèle rasant est réfracté dans l'eau. L'angle de réfraction $r$ satisfait la relation de Descartes :

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 = n\sin r$$

$$\sin r = \frac{3}{4}$$




Pour le poisson, le faisceau parallèle semble provenir d'une direction faisant un angle $r = 48{,}6°$ avec la verticale.

**2.** Le poisson voit le Soleil dans la direction réelle si $i = r$, $i$ étant l'angle d'incidence des rayons issus du Soleil. Avec $\sin i = n \sin r$, cette condition n'est vérifiée que si $i = r = 0°$, c'est-à-dire lorsque le Soleil est au zénith dans l'hémisphère Nord, au nadir dans le Sud….

# Dioptres sphériques

## Exercice 9 Grandissement d'un dioptre sphérique

Un poisson se trouve dans un bocal supposé sphérique et dont l'épaisseur est négligée. On note C le centre de ce dioptre sphérique eau/air et $R$ son rayon. Un observateur en O dans l'air examine le poisson qui se déplace sur l'axe CO du bocal. On donne $n(\text{eau}) = \dfrac{3}{4}$.

**1. Exprimer le grandissement transverse $\gamma(x)$ en fonction de $x$, $n$ et $R$, lorsque le poisson se trouve à la distance $x$ de la paroi du bocal ($x$ est mesuré sur l'axe CO).**

**2. Tracer la courbe de variation de $\gamma(x)$. Peut-on voir le poisson inversé ?**

**3. Quelles sont les positions extrêmes de l'image du poisson ?**

### Solution

**CONSEIL :** cet exercice est une application directe du cours : il s'agit d'étudier le grandissement par un dioptre sphérique, l'objet étudié étant un poisson P (et son image P' à travers le dioptre sphérique que constitue un bocal).

**1.** Le grandissement $\gamma$ s'écrit : $\gamma = n\dfrac{\overline{SP'}}{\overline{SP}}$. Exprimons $\overline{SP'}$ en fonction de $\overline{SP} = x$. Avec $R = \overline{CS}$ et en appliquant la relation de conjugaison d'un dioptre sphérique avec origine au sommet, on obtient :

$$\frac{n}{\overline{SP}} - \frac{1}{\overline{SP'}} = \frac{n-1}{\overline{SC}} = \frac{1-n}{R}$$

Soit :

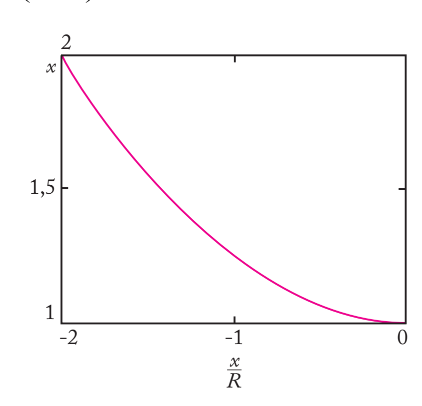
$$\overline{SP'} = \frac{1}{\dfrac{n}{x} - \dfrac{1-n}{R}}$$

On en déduit le grandissement $\gamma(x)$ :

$$\gamma(x) = \frac{1}{1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{x}{R}}$$

**2.** La position du poisson est comprise entre $-2R < x < 0$.

De plus $1 - \dfrac{1}{n} > 0$. La courbe $\gamma(x)$ décroît de $\gamma(-2R) = 2$ à $\gamma(0) = 1$. Le poisson est toujours vu à l'endroit ; plus il est près de l'observateur, plus il est vu avec sa taille réelle.



**3.** On a $\overline{SP'} = \gamma \frac{\overline{SP}}{n}$.

Lorsque $x = -2R$, $\gamma = 2$, on a : $\overline{SP'} = 2\frac{(-2R)}{\frac{4}{3}} = -3R$.

Lorsque $x = 0$, on a $\overline{SP'} = 0$.

Le poisson semble bouger entre la paroi la plus proche de l'œil ($\overline{SP'} = 0$) et une paroi distante de $3R$ derrière cette paroi.

## Exercice 10 Déviation par une goutte d'eau

Un rayon lumineux monochromatique pénètre dans une sphère homogène transparente d'indice $n > 1$ et émerge après s'être réfléchi une fois à l'intérieur de la sphère.

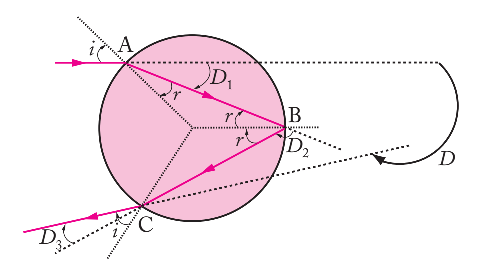
**1. Déterminer la déviation *D* du rayon en fonction des angles *i* et *r* d'incidence et de réfraction.**

**2. Montrer que cette déviation passe par un extremum $D_m$ et déterminer l'angle d'incidence $i_m$ correspondant à cet extremum.**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté particulière. Il s'agit d'étudier la trajectoire d'un rayon lumineux dans une goutte d'eau : le rayon dans l'air entre dans la goutte d'eau (réfraction par un dioptre sphérique air/eau), se réfléchit une fois dans la goutte (réflexion sur un dioptre sphérique eau/air) et ressort de la goutte (réfraction par un dioptre sphérique eau/air).**

**1.**




Suivons le trajet optique du rayon dans la goutte : après la réfraction en A, la déviation s'écrit $D_1 = i - r$ ; après la réflexion en B, $D_2 = \pi - 2r$ ; enfin, la dernière réfraction en C conduit à une déviation $D_3 = i - r$. La déviation totale $D$ s'écrit comme la somme des déviations successives :

$$D = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r) = 2i - 4r + \pi.$$

**2.** $D$ ne dépend que de $i$ et $r$. Or, $r$ est relié à $i$ par la loi de la réfraction donc $D$ ne dépend que de la seule variable $i$. Le minimum de $D$ en fonction de l'angle d'incidence $i$ correspond à la valeur de $i$ pour laquelle $\frac{dD}{di}$ s'annule en changeant de signe. Calculons la différentielle d$D$ :

$$dD = 2di - 4dr$$

On cherche à exprimer d$D$ uniquement en fonction de d$i$. En dérivant la relation de Descartes pour la réfraction $\sin i = n \sin r$, nous obtenons :

$$\cos i \, \mathrm{d}i = n \cos r \, \mathrm{d}r$$

et donc :

$$\mathrm{d}D = 2\mathrm{d}i\left(1 - 2\frac{\cos i}{n \cos r}\right)$$

Le minimum est donc atteint quand $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$, donc pour $i_\mathrm{m}$ tel que :

$$n \cos r_\mathrm{m} = 2 \cos i_\mathrm{m}.$$

Avec par ailleurs : $n^2 \cos^2 r_\mathrm{m} = n^2 (1 - \sin^2 r_\mathrm{m}) = n^2 - \sin^2 i_\mathrm{m}$ on obtient :

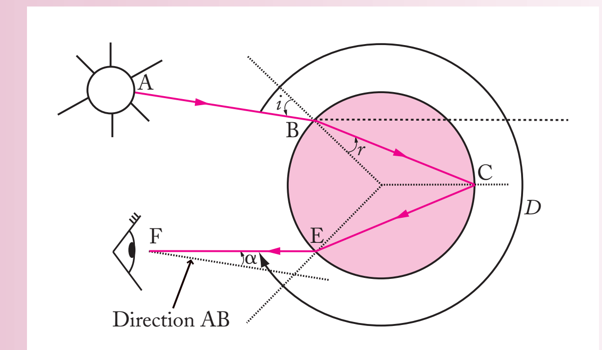
$$n^2 + \cos^2 i_\mathrm{m} - 1 = 4 \cos^2 i_\mathrm{m}.$$

Soit

$$\cos^2 i_\mathrm{m} = \frac{n^2 - 1}{3}.$$

## Exercice 11 L'arc-en-ciel

Descartes explique la forme de l'arc-en-ciel dans le *Discours de la méthode* (1637) en raisonnant sur une seule radiation, le rouge. Soit AB la direction des rayons émis par le soleil, le faisceau de rayons étant supposé parallèle. Un rayon du faisceau rencontre en B une gouttelette d'eau ; il y a réfraction en B, puis réflexion en C, le rayon sort finalement en E et parvient en F à l'observateur : l'observateur voit la radiation rouge dans une direction faisant un angle $\alpha$ avec celle des rayons incidents (AB) .




**1. Pourquoi Descartes ne considère-t-il pas la réfraction du rayon en C ? Exprimer l'angle $\alpha$ en fonction de la déviation *D*.**

**2. L'angle $\alpha$ sous lequel la couleur rouge est vue par l'observateur correspond au minimum de déviation. Expliquer.**

**3. En généralisant en 3D le raisonnement de Descartes à deux dimensions, retrouver la forme de l'arc vu par l'observateur.**

La lumière du soleil contient toutes les longueurs d'onde du spectre visible, du bleu au rouge. Par ailleurs, l'indice optique de l'eau dépend de la longueur d'onde de la radiation considérée : il décroît lorsque la longueur d'onde augmente (loi de Cauchy).

**4. Sachant que la longueur d'onde du rouge est plus grande que celle du bleu, retrouver l'ordre des couleurs observées sur un arc-en-ciel. On admettra que le minimum de déviation est obtenu pour le même angle d'incidence $i_m$ et ce quelle que soit la longueur d'onde.**

**5. Au-dessus de cet arc-en-ciel, dit primaire, on observe parfois un autre arc, dont l'ordre des couleurs est inversé, appelé arc-en-ciel secondaire. À quel cheminement des rayons lumineux ce second arc correspond-il ?**

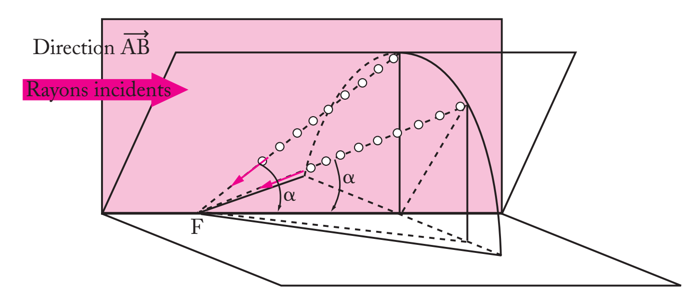
**6. Calculer la déviation d'un rayon qui contribue à l'arc secondaire et retrouver l'inversion de l'ordre des couleurs.**

## Solution

**1.** Il y a bien sûr une réfraction en C, c'est-à-dire qu'une partie de la lumière sort de la goutte ; cependant, une autre partie est réfléchie et poursuit son chemin jusqu'à E. En E, une partie de la lumière est à nouveau réfractée, une autre réfléchie, etc. Descartes ne considère pas la lumière réfractée en C car elle ne peut pas donner lieu à un arc-en-ciel observable : en effet, pour recevoir cette lumière, l'observateur devrait faire face au soleil. Il recevrait alors, en même temps que cette lumière, celle, directe et plus intense, du soleil. L'angle $\alpha$ sous lequel l'observateur voit la radiation s'écrit $\alpha = \pi - D$.

**2.** Suivant la position du point B sur la goutte, la valeur de l'angle d'incidence $i$ prend toutes les valeurs entre 0 et $\pi$. Une même radiation sort donc de la goutte avec également toutes les valeurs de déviations possibles ce qui revient à dire que cette radiation est visible pour l'observateur sous tous les angles $\alpha$ possibles ! Pour comprendre la formation de l'arc-en-ciel, il faut raisonner sur l'intensité de la lumière reçue par l'observateur : lorsqu'un rayon arrive sur la goutte en B avec une incidence quelconque, il sort avec une incidence $D(i)$ a priori très différente de celle, $D(i')$, d'un rayon incident en B' voisin de B : dans la direction $\alpha(i)$, la radiation est donc visible mais de faible intensité puisque seul le rayon provenant de B contribue à son intensité. En revanche, lorsqu'on se place au minimum de déviation, par définition, $D(i_m)$ et $D(i')$ sont très voisins et tous les rayons au voisinage de B contribuent à l'intensité de la radiation pour une observation dans la direction $\alpha(i_m)$ correspondante.

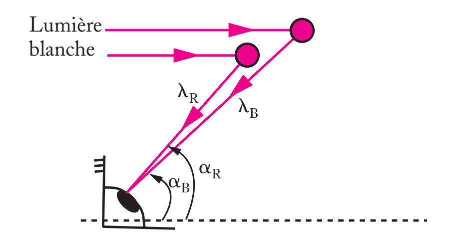
**3.**




Le plan « de coupe » de Descartes est construit en utilisant la direction des rayons incidents (AB) et le point F qui définit l'observateur. Autrement dit, ce plan n'est pas unique

puisque l'on peut déplacer la direction $\overrightarrow{AB}$ autour de l'observateur : on reconstruit ainsi la forme de l'arc.

**4.** Pour retrouver l'ordre des couleurs de l'arc-en-ciel, il faut trouver la loi de variation de $\alpha(\lambda)$, étant entendu que l'angle d'incidence considéré est celui du minimum de déviation (supposé commun à toutes les longueur d'onde). Avec $\alpha = \pi - D = 4r - 2i$, la variation de $\alpha$ avec $n$ dépend du signe de $\frac{d\alpha}{dn} = 4\frac{dr}{dn}$. La relation de Descartes donne $\sin i = n \sin r$. En différentiant cette expression, on a $\sin r\, dn + n \cos r\, dr = 0$, soit :




$$\frac{d\alpha}{dn} = -4\frac{\tan r}{n} < 0\,.$$

On en déduit que $\alpha$ diminue lorsque $n$ augmente, c'est-à-dire lorsque $\lambda$ diminue. Le rouge est vu sous un angle $\alpha$ plus grand que le bleu : il paraît plus haut dans le ciel.

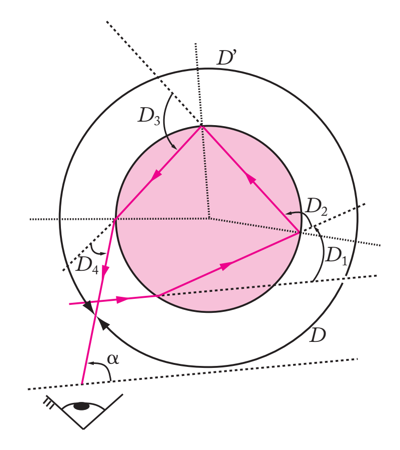
**5.** L'arc-en-ciel secondaire correspond à deux réflexions dans la goutte.

**6.** En suivant le trajet du rayon, on a $D_1 = D_4 = i - r$ et $D_2 = D_3 = \pi - 2r$, on en déduit $D' = 2\pi + 2i - 6r$. Par convention, on choisit, pour mesurer la déviation, l'angle complémentaire $D$ :

$$D = 2\pi - D',$$

soit

$$D = 6r - 2i$$




Les couleurs de l'arc-en-ciel secondaire sont vues sous un angle $\alpha = \pi - D = \pi + 2i - 6r$. On a donc cette fois :

$$\frac{d\alpha}{dn} = -6\frac{dr}{dn} = 6\frac{\tan r}{n} > 0$$

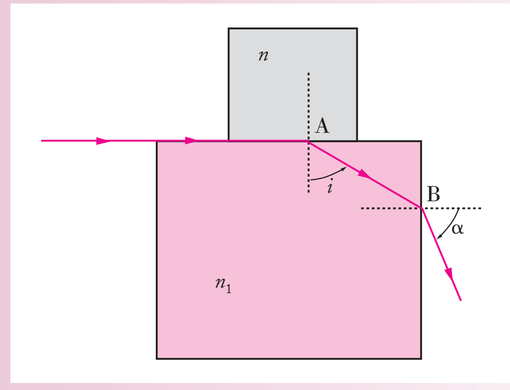
On en déduit que $\alpha$ augmente lorsque $n$ augmente. Le rouge est vu sous un angle $\alpha$ plus petit que le bleu : il paraît plus bas dans le ciel.

Les arcs-en-ciel secondaires sont beaucoup plus difficiles à observer que les arcs primaires. En effet, il sont causés par des rayons ayant subis deux réflexions et deux réfractions dans une goutte d'eau (alors que ceux responsables de l'arc primaire n'ont subit qu'une réflexion). À chaque interface, les rayons perdent de leur intensité lumineuse. L'arc secondaire est donc moins intense que l'arc primaire.

# RÉFRACTOMÉTRIE

## Exercice 12 Réfractométrie

Pour mesurer l'indice $n$ d'un milieu solide transparent, on taille dans ce matériau un cube que l'on place sur un autre cube en verre d'indice $n_1$. On envoie un pinceau de lumière monochromatique sous incidence rasante sur la surface de séparation entre les deux cubes en A, et on mesure l'angle d'émergence $\alpha$ dans l'air en B.




**1. Écrire les lois de Descartes pour les réfractions en A et B**

**2. À partir des relations précédentes, donner l'expression de $n^2$ en fonction de $n_1$ et $\alpha$. Sachant que $n_1$ = 1,7321 et que $\alpha$ = 60°, calculer la valeur de $n$.**

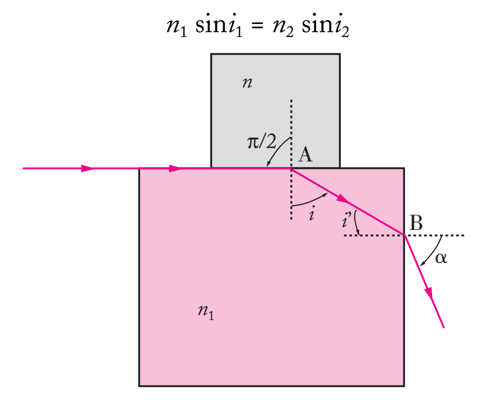
**3. Donner l'expression de l'erreur $\Delta n$ sur $n$ en fonction des erreurs $\Delta n_1$ sur $n_1$ et $\Delta\alpha$ sur $\alpha$. Calculer la valeur de $\Delta n$ sachant que $\Delta n_1 = 10^{-5}$ et que $\Delta\alpha = 1'$.**

### Solution

**CONSEIL :** cet exercice ne présente pas de difficulté particulière. Il s'agit d'étudier la trajectoire d'un rayon lumineux (un pinceau de lumière étant formé d'un ensemble de rayons parallèles entre eux) réfractés deux fois, en A puis en B, par deux dioptres plans.

**1.** La loi de réfraction de Descartes pour un rayon incident faisant un angle d'incidence $i_1$ avec la normale à l'interface milieu $n_1$/milieu $n_2$ permet de calculer l'angle de réfraction $i_2$ du rayon réfracté :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$



En A, le milieu 1 est d'indice $n$ et le milieu 2 d'indice $n_1$. $\frac{\pi}{2}$ est l'angle d'incidence et $i$ l'angle de réfraction. On a donc :

$$n \sin\frac{\pi}{2} = n = n_1 \sin i$$

En B, le milieu 1 est d'indice $n_1$ et le milieu 2 d'indice 1. $i' = \frac{\pi}{2} - i$ est l'angle d'incidence et $\alpha$ l'angle de réfraction. On a donc :

$$n_1 \sin(\frac{\pi}{2} - i) = n_1 \cos i = \sin\alpha.$$

**2.** Reprenons les expressions précédentes (élevées au carré) et sommons-les :

$$n_1^2 \sin^2 i = n^2$$
$$n_1^2 \cos^2 i = \sin^2\alpha$$

d'où

$$n_1^2 = n^2 + \sin^2\alpha.$$

On a donc :

$$n^2 = n_1^2 - \sin^2\alpha.$$

A.N. $n^2 = 2{,}2502$ et $n = 1{,}5001$.

**3.** Pour calculer l'erreur $\Delta n$ sur $n$, il faut différencier l'expression précédente et prendre la valeur absolue de chaque terme :

$$d(n^2) = d(n_1^2 - \sin^2\alpha)$$
$$n dn = n_1 dn_1 - \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha.$$

Soit finalement pour l'erreur $\Delta n$ :

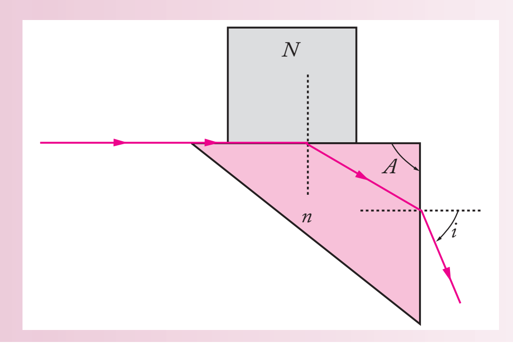
$$\Delta n = \frac{n_1}{n}\Delta n_1 + \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{n}\Delta\alpha$$

A.N. $\Delta\alpha = 1' = 5 \cdot 10^{-6}$rad et $\Delta n = 2 \cdot 10^{-5}$.

L'erreur sur la mesure de l'indice est très petit ce qui permet une bonne détermination expérimentale de l'indice de réfraction du matériau considéré.

## Exercice 13 Réfractomètres de Pulfrich et d'Abbe

Pour mesurer l'indice $N$ d'un milieu, on propose le système suivant : un bloc du matériau d'indice $N$ inconnu est posé sur un prisme d'indice $n$ connu. On envoie un pinceau de lumière, assimilé à un seul rayon, en incidence rasante sur la face du prisme en contact avec le bloc d'indice $N$. Le rayon émerge du prisme en faisant un angle $i$ avec la normale à la face de sortie.



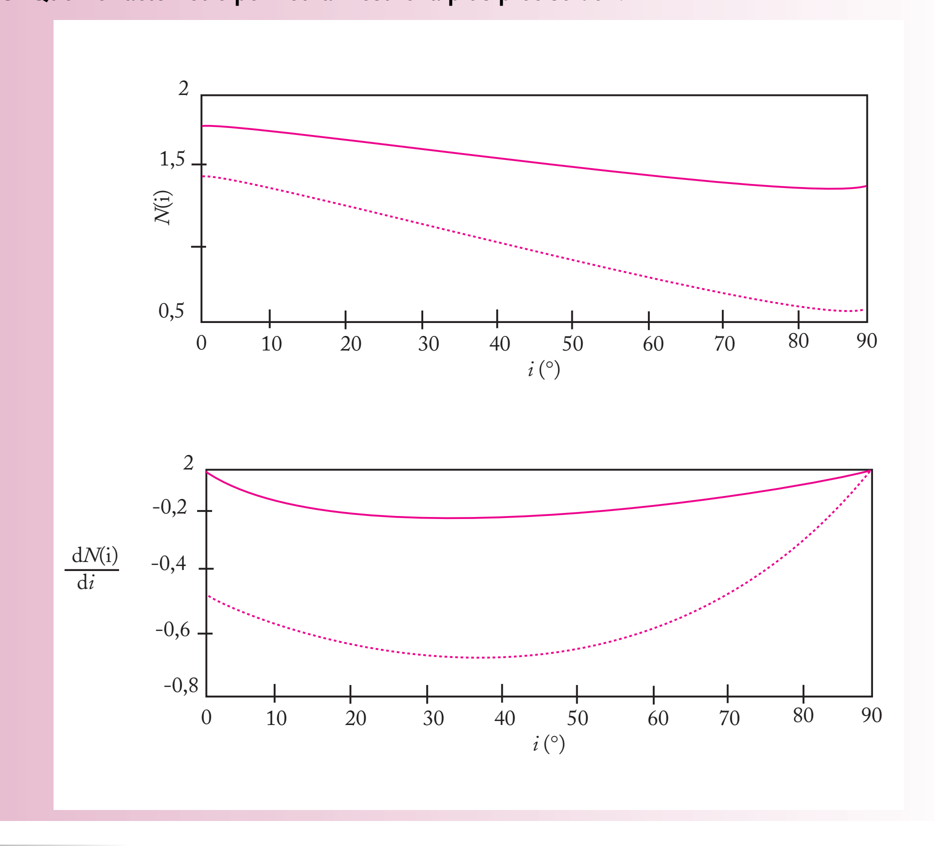
Dans le réfractomètre de Pulfrich, on a $A = 90°$ et $n = 1{,}732$ ; dans celui d'Abbe, $A = 61°$ et $n = 1{,}6$.

**1. Montrer que la mesure de *i* permet de calculer *N*.**

**Les courbes ci-dessous représentent les variations de *N*(*i*) et $\frac{dN(i)}{di}$ en fonction de *i* obtenues pour les deux réfractomètres.**

**2. Effectuer l'application numérique pour *i* = 30°, obtenu avec le réfractomètre de Pulfrich. Indiquer la courbe correspondant au réfractomètre de Pulfrich et celle correspondant à celui d'Abbe. Le réfractomètre d'Abbe permet-il de mesurer l'indice d'un tel matériau ?**

**3. Quel réfractomètre permet la mesure la plus précise de *N* ?**




## Solution

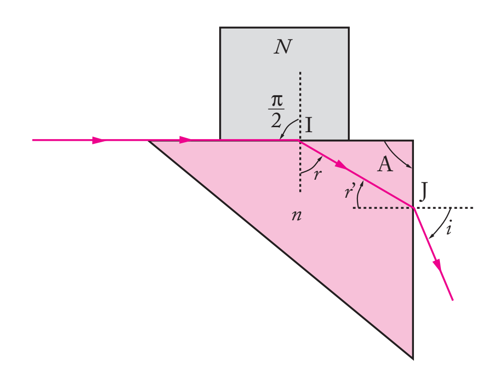
**CONSEIL : comme dans l'exercice précédent, il s'agit ici d'étudier la trajectoire d'un rayon lumineux deux fois réfracté par des dioptres plans.**

**1.** Le rayon incident à l'interface prisme/bloc ($N$) est réfracté dans le prisme en faisant un angle $r$ avec la normale au prisme ; au point I, on écrit la loi de Descartes :

$$N \sin\frac{\pi}{2} = N = n \sin r$$

Le rayon se propage dans le prisme et rencontre l'interface prisme/air en J. Il est alors réfracté dans l'air (une partie de l'intensité lumineuse est également réfléchie dans le prisme). En J, on écrit la loi de Descartes pour la réfraction :

$$n \sin r' = \sin i$$




On exprime l'angle $r'$ en fonction de l'angle $A$ du prisme et de l'angle de réfraction $r$ : dans le triangle AIJ, on a $\widehat{(AJI)} = \frac{\pi}{2} - r'$, $\widehat{(JIA)} = \frac{\pi}{2} - r$ et $\widehat{(IAJ)} = A$ ;

$$\widehat{(AJI)} + \widehat{(JIA)} + \widehat{(IAJ)} = \pi - r' - r + A.$$

La somme des angles d'un triangle étant égal à π, on en déduit :

$$r' = A - r$$

On a donc :

$$\sin i = n \sin r' = n \sin (A - r)$$

$$r = A - \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$$

Avec $N = n \sin r$, on obtient finalement pour $N$ :

$$N = n\sin\left(A - \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)\right)$$

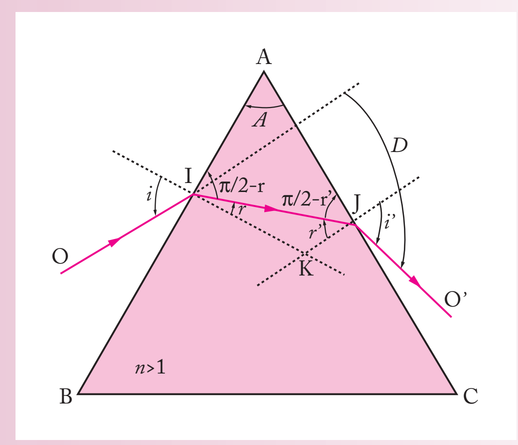
**2.** L'application numérique avec $i = 30°$ pour le réfractomètre de Pulrich donne $N = 1{,}658$. Des deux courbes $N(i)$ tracée, seule la courbe en trait plein permet la mesure d'indices supérieures à 1,5. C'est donc la courbe en trait plein qui correspond au réfractomètre de Pulfrich ; le réfractomètre d'Abbe ne permet pas de mesurer l'indice d'un tel milieu.

**3.** D'après la question précédente, les courbes en traits pleins correspondent au réfractomètre de Pulfrich et les courbes en traits pointillés au réfractomètre d'Abbe. Les courbes $\mathrm{d}N(i)/\mathrm{d}i$ montrent que l'erreur absolue $\Delta N$ sur la mesure de $N$ est plus importante pour le réfractomètre d'Abbe que pour le réfractomètre de Pulfrich. Par ailleurs, les indices mesurables avec le réfractomètre d'Abbe sont plus faibles que ceux mesurables avec le réfractomètre de Pulfrich ; l'erreur relative $\Delta N/N$ est donc également plus importante pour le réfractomètre d'Abbe que pour le réfractomètre de Pulfrich. Bien que les deux réfractomètres ne soient pas directement comparables puisque leurs gammes d'indices accessibles ne sont pas les mêmes, l'erreur sur la mesure des indices est plus importante pour le réfractomètre d'Abbe.

# PRISME

## Exercice 14 Réfraction dans un prisme

On considère le trajet d'un rayon lumineux OIJO' à travers un prisme.




**1. Montrer que $r + r' = A$ où $A$ est l'angle plan du dièdre.**

**2. Définir l'angle de déviation $D$.**

**3. Calculer $D$ en fonction de $i$, $i'$ et $A$. De quelles variables dépend $D$ ?**

**4. En utilisant un goniomètre, il est possible de vérifier que, pour une valeur particulière de l'angle d'incidence $i$, la déviation $D$ prend une valeur minimale. Calculer cette valeur $i_m$ de $i$, les valeurs correspondantes les angles $r$ et $r'$ et la déviation minimale $D_m$.**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice n'est ni plus ni moins qu'une question de cours sur les propriétés de la trajectoire d'un rayon lumineux à travers un prisme : à savoir donc traiter sur le bout des doigts !**

**1.** À partir du schéma, on définit les grandeurs suivantes :
- $n$ indice du prisme pour une radiation moyenne donnée ;
- $i$ l'angle d'incidence qui arrive sur le prisme en I ;
- $r$ l'angle de réfraction sur le dioptre d'entrée ;
- $r'$ l'angle d'incidence sur le dioptre de sortie ;
- $i'$ l'angle de réfraction sur le dioptre de sortie.

Dans le triangle IJA, la somme des angles vaut π : $(\frac{\pi}{2} - r) + (\frac{\pi}{2} - r') + A = \pi$.

On en déduit $r + r' = A$.

**2.** La déviation $D$ mesure l'angle dont le rayon a tourné après avoir traversé le prisme (voir schéma). On remarque que le rayon réfracté sortant du prisme est dévié vers sa base.

**3.** La déviation $D$ se calcule de proche en proche. Après la réfraction dans le prisme, le rayon a dévié d'un angle $D_1 = i - r$. Après la réfraction au point J, dans l'air, il a tourné de $D_2 = i' - r'$. On en déduit :

$$D = D_1 + D_2 = i + i' - r - r' = i + i' - A$$

On peut donc dire que la déviation du prisme, $D$, dépend des angles $i$, $i'$ et $A$. On peut aussi remarquer que l'angle $i'$ se déduit directement de $i$ et de $n$ par la loi de Descartes ($\sin i = n \sin r$ puis $r' = A - r$ et $\sin i' = n \sin r'$). $D$ dépend donc des variables $i$, $n$ et $A$ : on l'écrit $D(i, n, A)$.

**4.** Dans cette question, $A$ et $n$ sont manifestement fixés. On cherche donc le minimum de déviation $D_m$ lorsque l'angle $i$ varie. Ce minimum est atteint pour $\frac{dD}{di} = 0$.

$A$ est une constante donc : $dA = 0$ et $dr + dr' = 0$, soit :

$$dr = -dr' \qquad (1)$$

En dérivant l'expression $\sin i = n \sin r$, on obtient : $\cos i \, di = n \cos r \, dr$ soit :

$$dr = -dr' = \frac{\cos i}{n \cos r} di \qquad (2)$$

De la même façon, $\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr'$,
soit :

$$di' = -\frac{n \cos r'}{\cos i'} dr' \qquad (3)$$

En utilisant les relations (1) et (2) dans la relation (3), on obtient :

$$di' = -\frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} di$$

$$dD = di + di' = \left(1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'}\right) di$$

le minimum est atteint pour $\frac{dD}{di} = 0$,
soit $\cos r' \cos i = \cos r \cos i'$

$$\cos^2 r' \cos^2 i = \cos^2 r \cos^2 i'$$

$$(1 - \sin^2 r')(1 - \sin^2 i) = (1 - \sin^2 r)(1 - \sin^2 i')$$

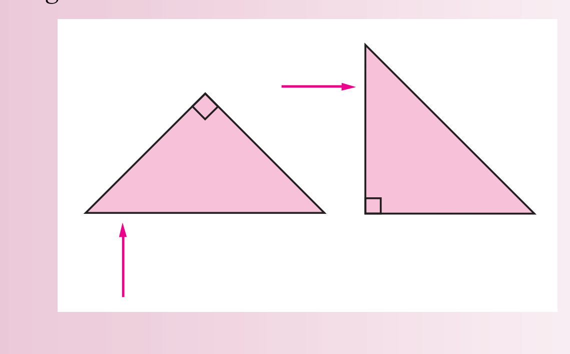
$$(1 - \sin^2 i / n)(1 - \sin^2 i) = (1 - \sin^2 i'/n^2)(1 - \sin^2 i').$$

Après simplification, on obtient $\sin^2 i' = \sin^2 i$ donc $i = i'$, $r = r'$ et $A = 2r$.
Grâce à cette méthode il est possible de déterminer précisément l'indice du prisme par le calcul suivant :

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = -\frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}.$$

## Exercice 15 Réflecteur et équerre optique

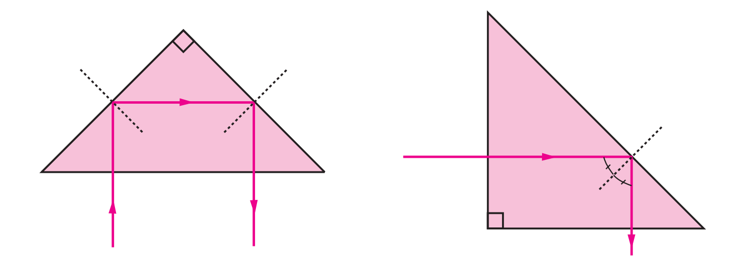
Dans les deux configurations ci-dessous, représenter la trajectoire du rayon lumineux dans le prisme d'angle $A = 90^\circ$ et d'indice de réfraction $n = 1.5$.



**Commenter.**

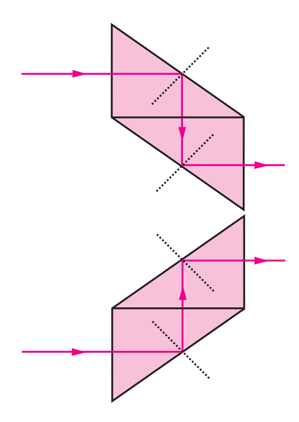
### Solution

Dans le premier cas, le rayon émergent fait un angle de 180° avec le rayon incident. On parle de réflecteur car le rayon est renvoyé dans la même direction mais dans le sens opposé. Contrairement aux miroirs le rayon lumineux est décalé.



Dans le second cas, le rayon émergent fait un angle de 90° avec le rayon incident. On parle d'équerre optique.

L'équerre optique est utilisée dans la paire de jumelles optiques afin de décaler le rayon incident, et ainsi, respecter l'écart entre les deux yeux.



## Exercice 16 Comprendre le rôle du prisme

Un prisme en verre de section triangulaire est traversé par une lumière monochromatique.

En utilisant les données du tableau ci-dessous. Commenter les propositions (1) à (7) et préciser à chaque fois si elles sont exactes ou non.

Le tableau fournit les indices optiques en fonction de la longueur d'onde pour différents matériaux à température constante.

| | $\lambda$ =486 nm | $\lambda$ = 589 nm | $\lambda$ = 656 nm | Variation par degré Celsius |
|---|---|---|---|---|
| Crown | 1,523 | 1,517 | 1,514 | $+1.10^{-6}$ |
| Flint | 1,585 | 1,575 | 1,571 | $+4.10^{-6}$ |
| Flint lourd | 1,919 | 1,890 | 1,879 | $+5.10^{-6}$ |
| Fluorine | 1,437 | 1,434 | 1,432 | $+6.10^{-6}$ |
| Diamant | 2,435 | 2,417 | 2,410 | $-1.10^{-5}$ |
| Eau | 1,338 | 1,333 | 1,331 | $-9.10^{-5}$ |

Indice de l'air $n$ = 1,000293.

**1. Plus le milieu étudié possède un indice élevé plus ce milieu est dit réfringent.**

**2. Plus la longueur d'onde de la radiation augmente plus l'indice de réfraction diminue.**

**3. L'indice du vide et celui de l'air sont exactement les mêmes.**

**4. La température ne modifie en rien l'indice d'un milieu transparent.**

**5. Le diamant a un indice élevé ce qui lui permet d'avoir des reflets violets.**

**6. Un prisme dévie plus une radiation rouge qu'une radiation violette.**

**7. On ne peut pas parler d'indice de réfraction dans un prisme sans y ajouter une valeur de longueur d'onde.**

### Solution

**1.** Vrai par définition.

**2.** Vrai, d'après les valeurs données dans le tableau.

**3.** Faux, mais c'est une approximation souvent retenue puisqu'ils sont très voisins (dans le vide, par définition, $n$ = 1 alors que dans l'air $n$ = 1,000293).

**4.** Faux. Ceci peut se lire sur le tableau ; les tables qui donnent les indices de réfraction sont établies pour une longueur d'onde donnée et pour une température fixée.

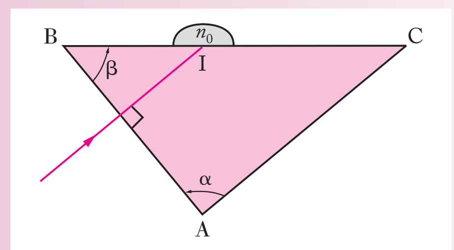
**5.** Faux. Question piège, ne cherchez pas trop longtemps ; le diamant qui réfléchit la couleur violette n'est pas un diamant… mais remarquez néanmoins que son indice de réfraction est très élevé.

**6.** Faux. Une radiation rouge a une longueur d'onde $\lambda_1$ = 700 nm, une violette $\lambda_2$ = 400 nm. La radiation violette est donc plus déviée que la rouge, l'indice de réfraction du milieu étant supérieur pour la radiation violette que pour la radiation rouge.

**7.** Vrai. À chaque radiation monochromatique correspond une longueur d'onde qui donne une seule valeur de $n$. Néanmoins pour un prisme, on donne une valeur moyenne de $n$ pour une radiation visible moyenne.

## Exercice 17 Prisme et goutte d'eau

On considère un prisme en verre ABC d'indice $n$ = 1,5 d'angles $\alpha = 90°$ et $\beta = 60°$. Un rayon entre dans le prisme par la face AB en incidence normale et rencontre la face BC en I, où l'on place une goutte d'un liquide transparent d'indice $n_0$.



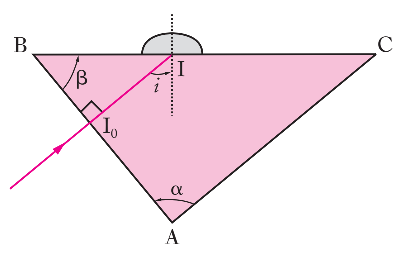

**1. Trouver la limite de l'indice $n_0$ du liquide pour qu'il y ait réflexion totale en I.**

**2. Dans ce cas, suivre la marche du rayon qui sort par la face AC et trouver la déviation totale du rayon.**

### Solution

**CONSEIL :** on peut se laisser guider par les questions. On doit d'abord déterminer la condition de réflexion totale sur un dioptre plan (milieu d'indice $n$/liquide d'indice $n_0$) ; cette question ne pose pas de difficulté. On doit, lorsque la réflexion totale se produit, étudier la trajectoire du rayon dans le prisme, ce dernier se réfractant sur un dioptre plan (milieu d'indice $n$/air) formé par AC.

**1.** En I, il y a réflexion totale du milieu $n$ vers le milieu $n_0$ si $n\sin i > n_0$. Calculons $i$ dans le triangle $II_0B$.




La somme des angles du triangle est égale à $\pi$ :

$$\widehat{(I_0BI)} + \widehat{(BII_0)} + \widehat{(II_0B)} = \pi$$

avec $\widehat{(I_0BI)} = \beta$, $\widehat{(BII_0)} = \frac{\pi}{2} - i$ et $\widehat{(II_0B)} = \frac{\pi}{2}$.

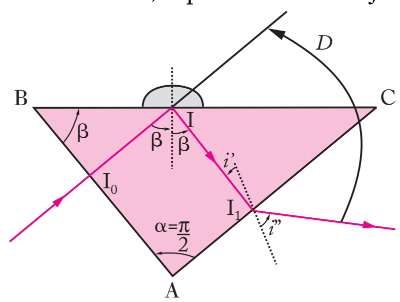
On en déduit la valeur de $i$ : $i = \beta$

La condition de réflexion totale $n \sin i > n_0$ s'écrit donc finalement :

$$n_0 < n \sin\beta$$

A. N. $n_0 < 1{,}23$.

**2.** Dans le cas de la réflexion totale en I, représentons le trajet du rayon.




Calculons la valeur de l'angle $i'$, angle d'incidence sur la face AC séparant le verre de l'air (d'indice 1) en $I_1$. Dans le triangle $II_1C$, on a :

$$\widehat{(ICI_1)} + \widehat{(CI_1I)} + \widehat{(I_1IC)} = \pi$$

avec $\widehat{(ICI_1)} = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\widehat{(CI_1I)} = \frac{\pi}{2} + i'$ et $\widehat{(I_1IC)} = \frac{\pi}{2} - i = \frac{\pi}{2} - \beta$.

On en déduit la valeur de $i'$ :

$$i' = 2\beta - \frac{\pi}{2} = 30°.$$

La loi de réfraction de Descartes permet de calculer $i''$ : $i \sin i' = \sin i''$. On en déduit la valeur de $i''$ :

$$i'' = -\arcsin(n\cos(2\beta)).$$

A.N. $i'' = 48{,}59°$

La déviation en I due à la réflexion totale est égale à $\pi - 2\beta$.

La déviation en $I_1$ due à la réfraction est égale à $i' - i'' = 2\beta - \frac{\pi}{2} - i''$

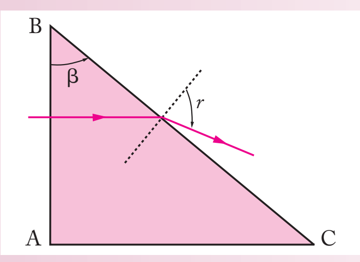
La déviation totale s'écrit donc :

$$D = \frac{\pi}{2} - i''.$$

A.N. $D = 41{,}41°$.

## Exercice 18 Propagation d'un rayon lumineux dans un prisme

Un prisme de verre d'indice $n = 1{,}51$ (voir figure) a pour section principale un triangle ABC rectangle en A. On note β l'angle $\widehat{ABC}$. Le prisme est plongé dans l'air d'indice égal à 1,00. On éclaire la face d'entrée AB sous incidence normale.



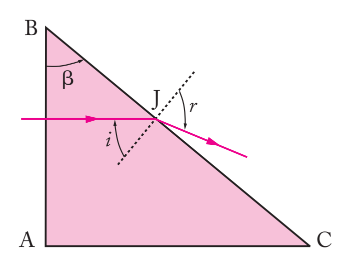

**1. Calculer la valeur de l'angle de réfraction *r* à la sortie du prisme lorsque β = 30,0°.**

**2. Soit $\beta_l$ la valeur limite de l'angle en B à partir de laquelle il y a réflexion totale sur la face BC du prisme. Calculer la valeur de $\beta_l$.**

**3. Quelle est la valeur β' de β telle que les rayons lumineux, après réflexion totale sur la face BC, émergent du prisme perpendiculairement à la face AC ?**

## Solution

**1.** À l'entrée du prisme en I, le rayon n'est pas dévié. Notons $i$ l'angle d'incidence sur la face de sortie du prisme en J; $i$ est relié à l'angle β par la relation $\beta = i$.




La loi de réfraction de Descartes en J donne $n \sin i = \sin r$. On obtient finalement :

$$r = \arcsin(n \sin\beta)$$

A.N. $r = 49°$.

**2.** Il y a réflexion totale sur la face BC si l'angle $i$ vérifie la relation :

$$n \sin i > 1.$$

Soit

$$\sin\beta > \frac{1}{n},$$

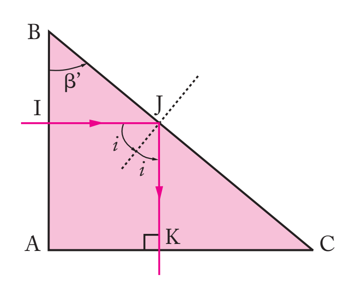
donc

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right).$$

A.N. $\beta_1 = 41{,}5°$

**3.** L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence en J (loi de réflexion de Descartes). Soit K le point d'impact du rayon sur la face AC ; pour que le rayon soit perpendiculaire à la face AC, il faut que l'angle $i$ soit tel que $2\,i = \frac{\pi}{2}$. On obtient finalement :

$$\beta' = i = 45°.$$



Chapitre 3

# Systèmes catadioptriques dans l'approximation de Gauss

Un peu d'histoire

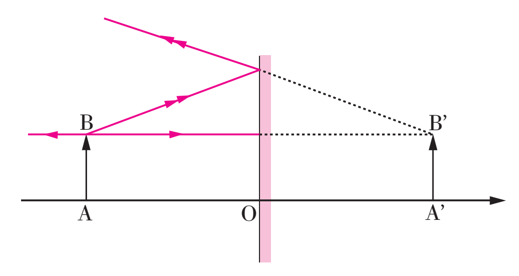
## L'optique au Moyen-Orient : le problème d'Alhazen

Après les théories antiques de la vision, les premiers siècles de notre ère n'apporteront guère de progrès dans la théorie de la lumière. Il faudra attendre le Moyen Âge pour que l'optique renaisse en Égypte. En effet, très tôt, les savants arabes se sont intéressés aux travaux helléniques sur l'optique et, loin de se contenter de traduire ces ouvrages, ils les reprennent et les corrigent C'est finalement le savant Alhazen (965-1039), de son vrai nom Ibn al-Haytham, qui contribuera de manière décisive à l'avancée de la compréhension de la lumière dans son ouvrage *Opticæ thesaurus Alhaseni Arabis* (traduction latine dans laquelle son nom fut modifié). Jusqu'alors, voir et éclairer se confondaient. Animé par une démarche scientifique rigoureuse, il s'est imposé à Alhazen qu'il fallait distinguer vision et éclairement lumineux. Il pose alors clairement les fondements de l'optique géométrique : les objets lumineux émettent des rayons qui se propagent en ligne droite et atteignent l'œil qui forme alors une image dont la position dépend de celle du cristallin. Il établit sous une forme générale la loi de la réflexion, tente une description du phénomène de réfraction mais surtout, s'attache à vérifier expérimentalement les lois qu'il énonce ; il sera notamment le premier à utiliser une chambre noire.

Alhazen peut être considéré comme l'initiateur d'une nouvelle démarche scientifique à la fois mathématique et expérimentale. Parmi ses disciples, on peut citer le persan Kamal al-Din al-Farisi (vers 1300) qui établit une table de la réfraction air-verre et donne une explication des arcs-en-ciel primaire et secondaire très proche de celle que donnera Descartes trois siècles plus tard dans son *Discours de la méthode.*

Alhazen laisse un problème qui porte son nom et s'énonce ainsi : « en quel point d'un miroir concave circulaire doit tomber la lumière provenant d'un point A donné pour qu'elle soit réfléchie en un autre point B donné ? » ; la solution du problème d'Alhazen revient à la résolution d'une équation du quatrième degré.

## 1. Miroir plan




On appelle **miroir** une surface réfléchissante. Si la surface est plane, on parle de miroir plan, si la surface est sphérique, le miroir est dit sphérique.
La loi de conjugaison d'un **miroir plan** est donnée par :

$$\overline{OA} = \overline{OA'}$$

Le grandissement γ d'un **miroir plan** est égal à 1 :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1$$

Le miroir plan est un exemple de système rigoureusement **stigmatique**.

## 2. Miroir sphérique

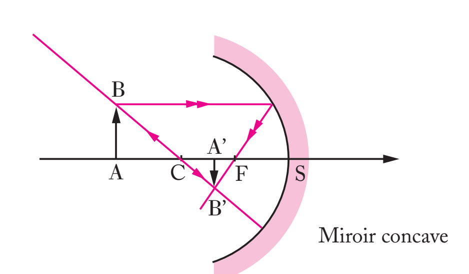
Les relations de conjugaison d'un **miroir sphérique** s'écrivent :

- origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

- origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$




- origine aux foyers :

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS}^2 \qquad \text{avec } \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Pour un miroir sphérique, les foyers objet et image sont confondus (F = F').
Le grandissement est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$




## Miroirs plans

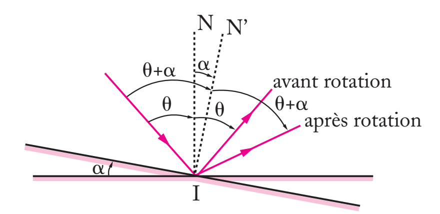
### Exercice 1 Rayon lumineux et miroir plan en rotation

Un rayon SI rencontre en I un miroir plan M. Le miroir est mobile autour du point I.

**De quel angle tourne le rayon réfléchi lorsque le miroir tourne autour de I d'un angle $\alpha$ ?**

#### Solution

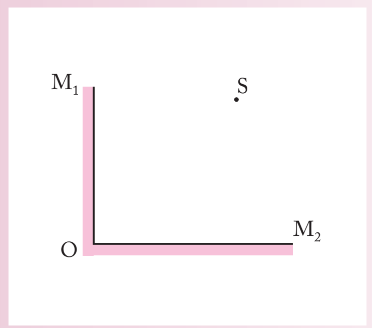
**CONSEIL : un exercice sans difficulté majeure. Il faut simplement calculer l'angle que font les rayons réfléchis avant et après la rotation du miroir.**




Avant la rotation du miroir, le rayon réfléchi fait un angle $\theta$ avec la normale au miroir en I et le rayon réfléchi fait un angle $2\theta$ avec le rayon incident. Avec la rotation du miroir, l'angle $\theta'$ entre le rayon incident et la normale N' devient $\theta' = \theta + \alpha$. Le rayon réfléchi fait donc un angle $2(\theta + \alpha)$ avec le rayon incident : le rayon réfléchi a tourné de $2\alpha$ quand le miroir a tourné de $\alpha$.

### Exercice 2 Image par deux miroirs plans perpendiculaires

On place deux miroirs plans perpendiculairement l'un à l'autre. Une source de lumière est placée au point S un observateur se trouve juste derrière cette source.



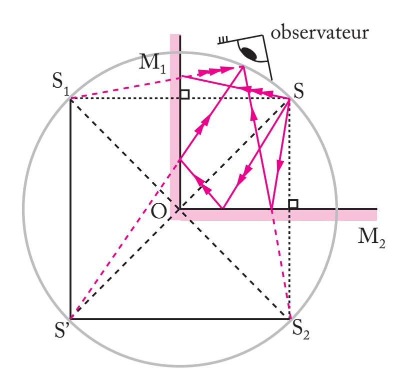

**1. Combien d'images de S peut-on observer ?**

**2. Vérifier que la source et ses images sont situées sur un cercle de centre O, intersection des deux miroirs.**

## Solution

**CONSEIL : cet exercice est facile à résoudre à partir d'un dessin ; il faut se souvenir que les images de S à travers le système formé des deux miroirs sont de deux natures : les images directes et celles correspondant à des réflexions multiples sur les deux miroirs.**

**1.** S donne une image $S_1$ directe à travers le miroir $M_1$ et une image $S_2$ directe à travers le deuxième miroir $M_2$. Dans les deux cas, le faisceau conique divergent issu de S donne après réflexion sur le miroir un faisceau conique divergent qui semble provenir d'un point situé derrière le miroir.




$S_1$ et $S_2$ se comportent comme des sources virtuelles émettant un faisceau conique. Une partie du faisceau semblant provenir de $S_1$ se réfléchit sur $M_2$ et donne, après réflexion, un faisceau conique divergent semblant provenir de S', image de $S_1$ à travers le miroir $M_2$. Dans le cas ou les deux miroirs sont placés orthogonalement l'un à l'autre, S' correspond également à l'image de $S_2$ à travers $M_1$. On obtient 3 images $S_1$, S' et $S_2$.

**2.** Montrons que S, S', $S_1$ et $S_2$ appartiennent à un même cercle de centre O. Le rayon incident SO est réfléchi sur $M_1$ et donne un rayon réfléchi semblant provenir de $S_1$ tel que $S_1O = OS$. De la même manière, SO est réfléchi sur $M_2$ donc $S_2O = OS$.
Le rayon SO est également réfléchi sur le miroir $M_1$ puis sur $M_2$ (ou l'inverse), ainsi S'O = OS. On en déduit que S, $S_1$, $S_2$ et S' sont équidistants de O donc ils situent sur un même cercle de rayon SO et de centre O.

## Exercice 3 Image à travers deux miroirs plans inclinés

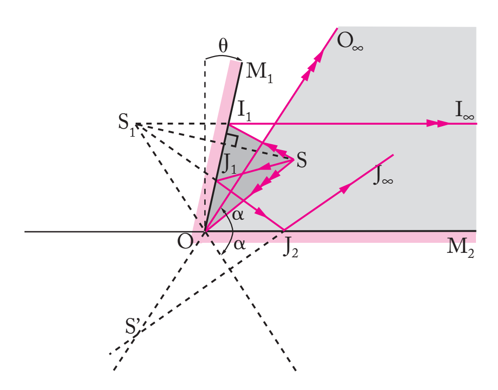
On place deux miroirs perpendiculairement puis on fait tourner un des deux miroirs d'un angle $\theta$ (petit). L'angle entre les deux miroirs n'est plus que de $\pi/2 - \theta$.

**Combien d'images pourra-t-on observer (nous nous intéresserons d'abord aux rayons réfléchis par $M_1$ puis par $M_2$) ?**

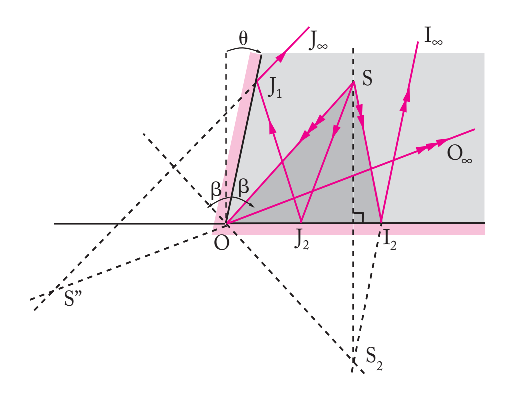
## Solution

**CONSEIL : nous vous conseillons de résoudre d'abord l'exercice 2 avant de traiter celui-ci, qui est, dans l'esprit, identique.**

Cette fois l'angle entre les deux miroirs est de $\pi/2 - \theta$ (voir exercice 2). Le faisceau issu de S qui se réfléchit sur $M_1$ et qui est susceptible de se réfléchir ensuite sur $M_2$ est compris entre les rayons extrêmes SO et $SI_1$ (figure ci-dessous).




Au-delà de SO, les rayons rencontrent d'abord le miroir $M_2$ et au-delà de SI, le rayon réfléchi s'éloigne de $M_2$ (SI est construit de sorte que le rayon réfléchi $I_1I_\infty$ est parallèle à $M_2$). Entre les deux, un rayon $SJ_1$ se réfléchit d'abord sur $M_1$ ($J_1J_2$) puis sur $M_2$ ($J_2J_\infty$).
Le faisceau lumineux réfléchi sur $M_1$ semble provenir de $S_1$, image directe de S à travers $M_1$. Le faisceau réfléchi sur $M_1$ et qui va se réfléchir sur $M_2$ est limité par l'angle $\widehat{I_1S_1O}$. Le faisceau réfléchi par $M_2$ est donc limité par le rayon $OO_\infty$ du côté de $M_1$. Le faisceau est divergent et semble provenir de $S'_2$, symétrique de $S_1$ par rapport à la direction de $M_2$. Il ne rencontre pas $M_1$ : il n'y a donc que deux images de S pour le faisceau issu de S rencontrant d'abord $M_1$.
À partir d'un raisonnement sur le faisceau rencontrant d'abord $M_2$ (figure ci-dessous), on obtient deux images supplémentaires $S_2$ et S". Il y a donc au total quatre images de la source.



## Exercice 4 Réflexion sur des miroirs, réflecteur idéal

Un rayon lumineux se réfléchit successivement sur deux miroirs plans qui font entre eux un angle $\theta$.

**1. Déterminer l'angle que fait le rayon émergent avec le rayon incident.**

**2. Que vaut la déviation dans le cas où $\theta = 90°$.**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté majeure. On considère un rayon lumineux incident sur l'un des miroirs, se réfléchissant sur ce miroir, puis sur l'autre miroir (incliné d'un angle égal à $\theta$). Il suffit de faire un schéma et de calculer les déviations à chaque réflexion.**

**1.** Au point A, le rayon incident sous un angle $i$ est réfléchi, sa déviation est alors égale à

$$D_1 = \pi - 2i$$

Il arrive ensuite au point B où il est de nouveau dévié d'un angle :

$$D_2 = \pi - 2i'$$

La déviation totale est donc égale à :

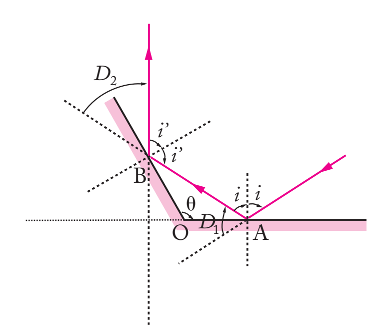
$$D = D_1 + D_2 = 2(\pi - i - i')$$

Par ailleurs en considérant le triangle OAB, on a :

$$\theta + \frac{\pi}{2} - i + \frac{\pi}{2} - i' = \pi$$

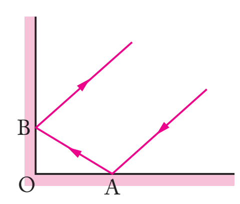
Nous obtenons ainsi :

$$D = 2(\pi - \theta)$$




**2.** Si $\theta$ est égal à $\frac{\pi}{2}$, la déviation $D$ est égale à $\pi$, le rayon est réfléchi parallèlement au rayon incident.

Ce système est utilisé comme réflecteur idéal (par exemple sur les bateaux pour réfléchir les ondes radar).



## Exercice 5 Image d'un objet étendu

Un adulte de hauteur $H = 1{,}80$ m se regarde dans un miroir vertical. Ses yeux sont à une hauteur $h = 1{,}70$ m.

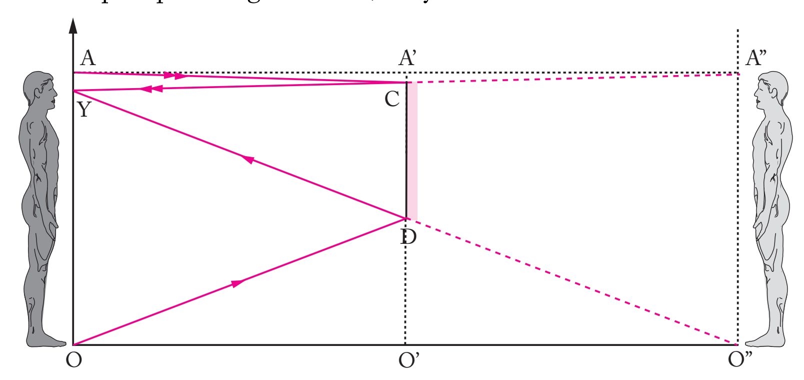
**1. Quelles doivent être la dimension et la position de ce miroir pour que l'adulte puisse se voir en entier ?**

**2. Un enfant de hauteur $H'=1{,}40$ m, ses yeux étant situés à la hauteur $h'=1{,}30$ m du sol se regarde dans le miroir ainsi fixé, que voit-il ?**

### Solution

**CONSEIL : pour traiter cet exercice, il faut traduire la condition de vision d'un point par l'observateur : un point est « vu » par l'observateur dans le miroir s'il existe un rayon émis par ce point atteignant ses yeux après réflexion sur le miroir.**

**1.** L'adulte est repéré par le segment OA, ses yeux sont en Y.




L'image A"O" de l'adulte AO est symétrique par rapport au miroir. Pour que l'adulte puisse se voir en entier, il faut que les rayons semblant provenir de sa tête A" et de ses pieds O" pénètrent dans son œil placé en Y. On note CD les extrémités du miroir.
Par construction, les triangles AA"Y et A'A"C sont semblables tout comme les triangles OO"Y et O'O"D, on a donc :

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{A'A''}}{\overline{AA''}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{DO'}}{\overline{YO}} = \frac{\overline{O'O''}}{\overline{OO''}} = \frac{1}{2}$$

puisque la position A' du miroir est par définition au milieu de AA".
Le miroir doit donc être placé à la hauteur DO' telle que:

$$\overline{O'D} = \frac{h}{2}$$

La dimension $\overline{DC}$ du miroir est égale à $\overline{O'A'} - (\overline{CA'} + \overline{O'D})$, soit :

$$\overline{DC} = \overline{O'A'} - \frac{(\overline{YA} + \overline{OY})}{2} = H - \frac{H}{2}$$

$$\overline{DC} = \frac{H}{2}$$

Notons que cette dimension et position sont indépendantes de la distance entre l'adulte et le miroir.
L'application numérique donne :

$$\overline{DO'} = 0,85\text{m}$$

$$\overline{DC} = 0,90\text{m}.$$

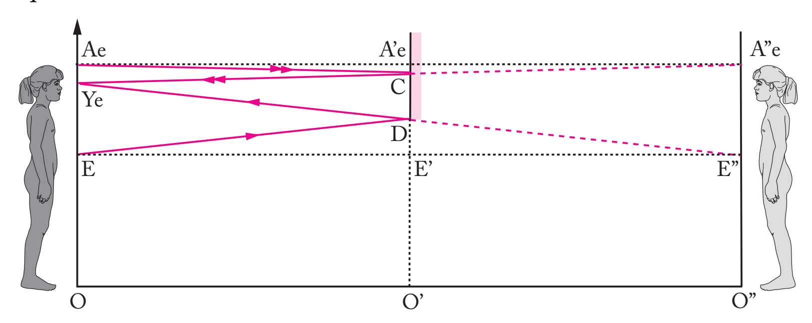
**2.** Les yeux de l'enfant, en $Y_e$, sont trop bas pour qu'il puisse se voir en entier ; il voit au-dessus de sa tête mais ne voit pas ses pieds ! Nous pouvons calculer la hauteur O"E" correspondant à la partie la plus basse de son corps qu'il ne voit pas. En procédant comme précédemment, nous avons :

$$\frac{\overline{DE'}}{\overline{Y_eE}} = \frac{\overline{DO'} - \overline{E'O'}}{\overline{Y'O} - \overline{E'O''}} = \frac{1}{2}$$

Avec $\overline{EO} = \overline{E'O'} = \overline{E''O''}$, on a :

$$\overline{E'O''} = 2\overline{DO'} - \overline{Y_eO} = h - h'$$

Quand l'enfant grandit, $h'$ tend vers $h$ et cette partie « invisible » se réduit pour devenir nulle dès que $h' = h$.




# Miroir sphérique, systèmes catadioptriques

## Exercice 6 Image à travers un miroir concave

On considère un miroir concave de rayon $R = 1$ m.

**1. Déterminer la distance focale du miroir.**

**2. On place le miroir à la distance $D = 5$ m d'un écran. Où doit-on placer un objet par rapport au miroir pour qu'il forme à travers le miroir une image nette sur l'écran ?**

**3. Quel est le grandissement obtenu ?**

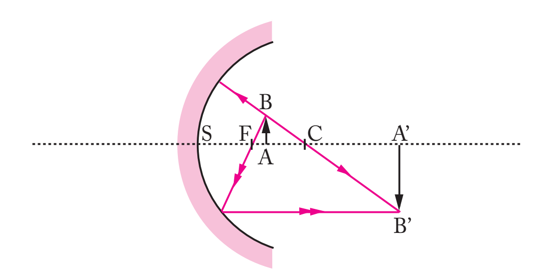
### Solution

**CONSEIL :** cet exercice est une application directe du cours : définition de la distance focale d'un miroir sphérique (et donc des points focaux), détermination de l'image d'un objet à travers un miroir sphérique, grandissement.

**1.** Par définition, le foyer objet F et le foyer image F' d'un miroir sont confondus :

$$\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{R}{2} = 50\,\text{cm}.$$

**2.** Soit AB l'objet qui donne, à travers le miroir, une image nette A'B' sur l'écran ($\overline{SA'} = D$).




Pour trouver la position de AB, utilisons la formule de conjugaison des miroirs sphériques avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{R}$$

On en déduit :

$$\overline{SA} = \frac{RD}{2D - R} = 55{,}56\ \text{cm}.$$

**3.** Le grandissement d'un miroir sphérique est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

$$\gamma = -\frac{2D - R}{R}$$

A.N. $\gamma = -9$.
L'image est agrandie et inversée.

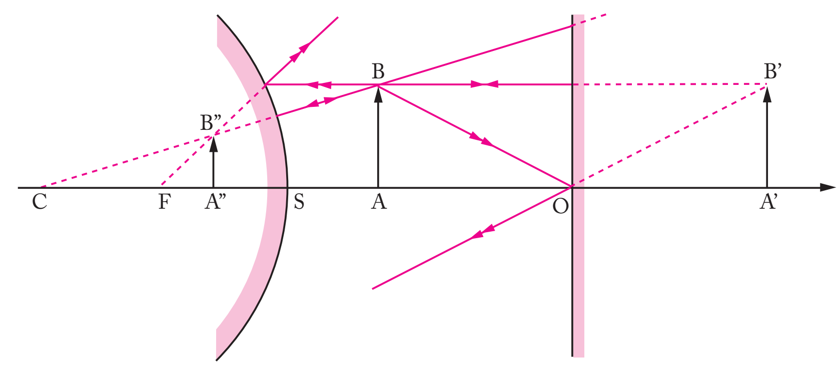
## Exercice 7 Images par un miroir plan et un miroir convexe

On place un objet lumineux A entre un miroir plan et un miroir convexe. Le miroir plan est perpendiculaire à CA, où C est le centre du miroir sphérique. L'objet est à la distance $d_1$ du miroir plan et à la distance $d_2$ du sommet S du miroir convexe. On observe que l'image A' donnée par le seul miroir plan et celle A" donnée par le seul miroir convexe sont à égale distance de l'objet lorsque $d_1$ = 30 cm et $d_2$ = 40 cm.

**En déduire le rayon du miroir convexe $R = -\overline{SC}$.**

## Solution

**CONSEIL : il faut traduire les données de l'énoncé en fonction de $R$, $d_1$ et $d_2$ : calculez la distance AA′ de l'objet à l'image A′ de A à travers le miroir plan, puis la distance AA″ de l'objet à l'image A″ de A à travers le miroir sphérique. D'après l'énoncé, on a AA′ = AA″ pour des valeurs particulières de $d_1$ et de $d_2$. Il faut donc calculer $R$ en fonction de $d_1$ et $d_2$ lorsque AA′ = AA″.**




L'image A' de A par le seul miroir plan vérifie :

$$\overline{OA'} = \overline{AO}$$

On a donc :

$$\overline{AA'} = 2d_1$$

L'image A" de A par le seul miroir convexe est telle que :

$$\frac{1}{\overline{SA''}} + \frac{1}{\overline{SA}} = -\frac{2}{R}$$

Soit :

$$\overline{SA''} + \frac{R\overline{SA}}{R+2\overline{SA}}$$

$$\overline{SA''} = -\frac{Rd_2}{R+2d_2}$$

On a donc :

$$\overline{AA''} = -d_2 - \frac{Rd_2}{R+2d_2} = -2\,\frac{d_2(R+d_2)}{R+2d_2}$$

Les deux images sont à égale distance de A si $\overline{A''A} = \overline{AA'}$, soit :

$$d_1 = \frac{d_2(R+d_2)}{R+2d_2}$$

On écrit cette condition en fonction de $R$ :

$$R = \frac{d_2(d_2-2d_1)}{d_1-d_2}$$

A. N. $R$ = 80 cm.

## Exercice 8 Images d'un objet par un miroir plan et un miroir convexe

On place un objet AB entre un miroir plan et un miroir convexe. Le miroir plan est perpendiculaire à CA, où C est le centre du miroir sphérique. La droite CA coupe le miroir plan en O. A est à la distance x du miroir plan et on note $D$ la distance entre C et O.

**1. Donner les caractéristiques de l'image $A_1B_1$ de AB, image correspondant aux rayons lumineux qui rencontrent d'abord le miroir plan puis le miroir convexe.**

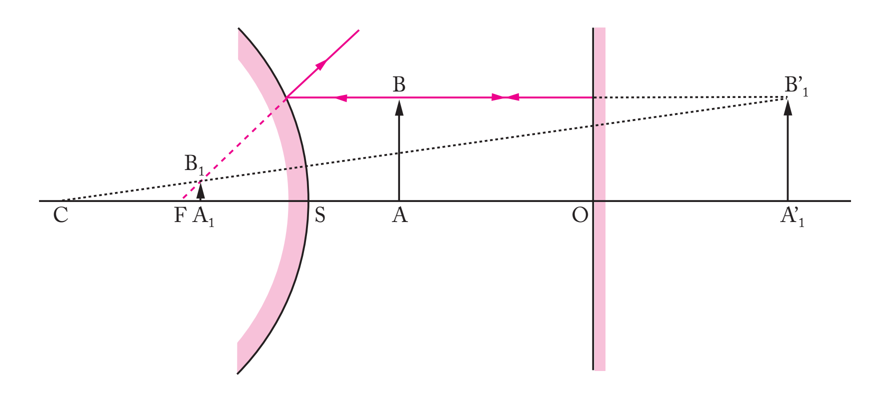
**2. Même question pour l'image $A_2B_2$ correspondant aux rayons lumineux qui rencontrent d'abord le miroir convexe puis le miroir plan.**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice ne pose pas de difficulté majeure. Souvenez-vous que les caractéristiques (position et taille) de l'image A''B'' d'un objet AB à travers la succession de deux dioptres $D_1$ et $D_2$ peuvent se calculer en utilisant l'image intermédiaire de AB à travers $D_1$ : A'B' est un objet pour $D_2$ et son image par $D_2$ coïncide avec A''B''.**

**1.** L'image $A'_1$ de A par le miroir plan est telle que :

$$\overline{AO} = \overline{OA_1'}$$




L'image $A_1$ de A par la succession miroir plan/miroir convexe coïncide avec l'image de $A'_1$ par le miroir convexe. La relation de conjugaison du miroir convexe permet de déterminer la position de $A_1B_1$ :

$$\frac{1}{\overline{SA_1}} + \frac{1}{\overline{SA'_1}} = -\frac{2}{R}$$

On obtient :

$$\overline{SA_1} = \frac{R\overline{SA'_1}}{R + 2\overline{SA'_1}} = -\frac{R(SO + \overline{OA'_1})}{R + 2(\overline{SO} + \overline{OA'_1})}$$

$$\overline{SA_1} = -\frac{R(D + x)}{R + 2(D + x)}$$

On en déduit la distance $\overline{OA_1}$ :

$$\overline{OA_1} = -D - \frac{R(D + x)}{R + 2(D + x)}$$

$$\overline{OA_1} = -\frac{x(2D+R)+2D(D+R)}{R+2(D+x)}$$

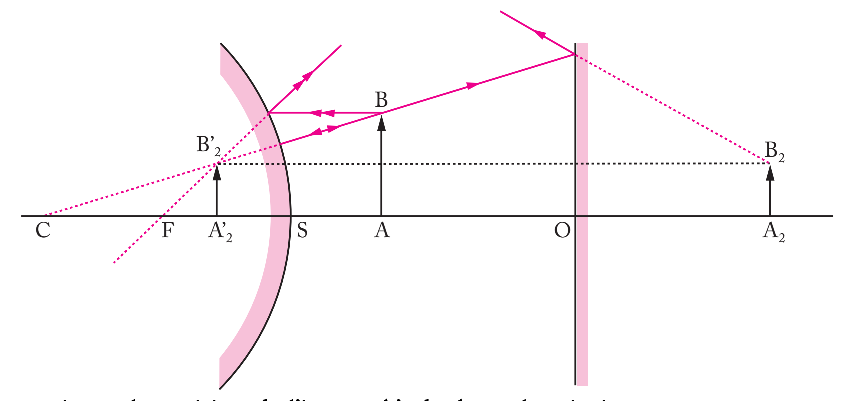
Le grandissement $\gamma_1$ par le système (miroir plan + miroir convexe) est donné par :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A'_1B'_1}}\frac{\overline{A'_1B'_1}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA'_1}}$$

$$\gamma_1 = -\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA'_1}} = \frac{R}{R+2(D+x)}$$

L'image est droite et plus petite que l'objet.

**2.**




Déterminons la position de l'image $A'_2$ de A par le miroir convexe :

$$\frac{1}{\overline{SA'_2}} + \frac{1}{\overline{SA}} = -\frac{2}{R}$$

$$\overline{SA'_2} = -\frac{R\overline{SA}}{R+2\overline{SA}} = -\frac{R((D-x))}{R+2((D-x))}$$

On en déduit la distance $\overline{OA'_2}$ :

$$\overline{OA'_2} = -D - \frac{R((D-x))}{R+2(D-x)}$$

$$\overline{OA'_2} = -\frac{-x(2D+R)+2D(D+R)}{R+2(D-x)}$$

L'image définitive $A_2B_2$ est l'image de $A'_2B'_2$ à travers le miroir plan : $\overline{A'_2O} = \overline{OA_2}$. On a donc :

$$\overline{OA_2} = -\frac{-x(2D+R)+2D(D+R)}{R+2(D-x)}$$

Par conséquent,

$$\overline{SA_2} = D + \frac{-x(2D+R)+2D(D+R)}{R+2(D-x)}$$

$$\overline{SA_2} = \frac{-x(4D+R)+D(4D+3R)}{R+2(D-x)}$$

Le grandissement $\gamma_2$ par le système (miroir convexe + miroir plan) est donné par:

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A'_2B'_2}} = \frac{\overline{A'_2B'_2}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'_2}}{\overline{SA'}}$$

$$\gamma_2 = \frac{R}{R+2(D-x)}$$

L'image est droite et plus petite que l'objet.

## Exercice 9 Détermination du rayon de courbure d'un miroir concave

On reprend les conditions de l'exercice précédent, mais on remplace le miroir convexe par un miroir concave.

**1. Comment sont modifiés les résultats précédents ?**

**2. Exprimer la distance *d* entre les deux images.**

**3.a. À quelle condition les deux images sont-elles à la même position ? Quelle est alors la nature de l'objet A ?**

**b. Peut-on dire que les images sont confondues ?**

### Solution

**1.** On passe du miroir convexe au miroir convexe en remplaçant $R$ par $-R$.

**2.** L'expression de $d = \overline{A_1A_2}$ est aisément obtenue à partir de l'exercice précédent :

$$d = \overline{A_1O} + \overline{OA_2} = \frac{x(2D+R)+2D(D+R)}{R+2(D+x)} + \frac{-x(2D+R)+2D(D+R)}{R+2(D-x)}$$

$$d = 4(2D+R)\frac{D(D+R)-x^2}{(2D+R)^2-x^2}$$

**3.a.** Les deux images sont à la même position si $d = 0$, c'est-à-dire si :

$$x = \sqrt{D(D+R)}$$

On a alors $x > D$ et l'objet A est virtuel pour les deux miroirs.

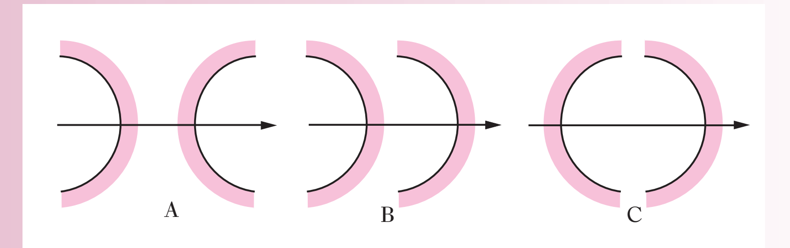
**b.** Les deux images sont confondues si elles ont la même taille (on ne peut alors pas les distinguer). Ici, et d'après l'exercice précédent :

$$\gamma_2 = \frac{-R}{-R+2(D-x)} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \frac{-R}{-R+2(D+x)}$$

Des grandissement égaux conduisent à $x = 0$, ce qui correspond à un cas physiquement absurde. Les deux grandissements sont donc différents et on ne peut donc pas dire que les images soient confondues.

## Exercice 10 Systèmes confocaux

On place deux miroirs sphériques face-à-face. Le système est dit confocal si les foyers des deux miroirs sont confondus.



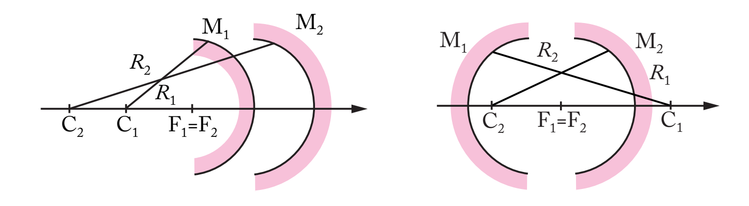

**1. Les trois systèmes proposés sur la figure peuvent-ils être confocaux ? Préciser l'ordre sur les rayons de courbure lorsque cela peut être le cas.**

**2. On considère un système confocal formé de deux miroirs $M_1$ et $M_2$. Déterminer les positions des images $F_1$ et $F_2$ du foyer F commun aux deux miroirs respectivement à travers $M_1$ puis $M_2$ et à travers $M_2$ puis $M_1$.**

### Solution

**CONSEIL : dans la première question, il s'agit simplement de déterminer (qualitativement) si les foyers peuvent être confondus ou non. Dans la seconde question, on suppose que le système formé des deux miroirs est confocal et on se propose simplement de déterminer les images du point focal à travers chacun des miroirs.**

**1.** Le foyer d'un miroir sphérique est au milieu de SC, où S est le sommet du miroir et C son centre. Dans le cas A, le foyer du miroir de gauche est à sa gauche et le foyer du miroir de droite à sa droite ; ils ne peuvent donc pas être confondus ! Les systèmes dans les cas B et C peuvent être confocaux comme le montre la figure ci-dessous.

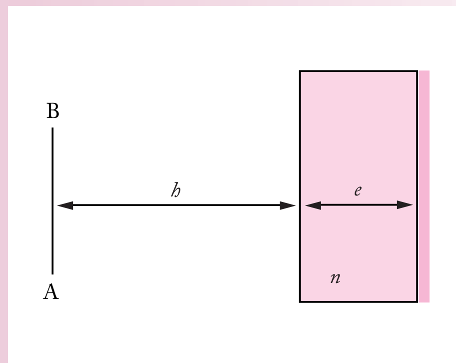



**2.** Par définition, l'image du foyer F à travers un des deux miroirs forme une image à l'infini. Ainsi l'image de F à travers $M_1$ est à l'infini. Également par définition, l'image d'un objet à l'infini à travers un des deux miroirs se forme au point focal F. On a donc :

$$F \xrightarrow{M_1} \infty \xrightarrow{M_2} F_2 = F \quad \text{et} \quad F \xrightarrow{M_2} \infty \xrightarrow{M_1} F_1 = F$$

## Exercice 11 Image d'un objet à travers une lame réfléchissante

La face arrière d'une lame à faces parallèles, d'épaisseur $e$ et d'indice $n$, est rendue réfléchissante. C'est ce dispositif qui est utilisé pour les miroirs usuels (miroir de salle de bain, etc.). À une distance $h$ de la première face se trouve un petit objet plan, AB, parallèle à la lame.




On désire déterminer les positions des images successives de cet objet à travers les différents dioptres, A'B' étant l'image définitive. On note $A_1$ l'image de A à travers le dioptre air/lame, $A_2$ l'image de $A_1$ par le miroir et A' l'image de $A_2$ à travers le dioptre lame/air. Les points $O_1$ et $O_2$ se trouvent sur la normale au système passant par A. $O_1$ est sur la première face et $O_2$ sur la seconde. Toutes les expressions littérales seront données en fonction de $n$, $e$ et $h$.

**1.a. Donner les expressions littérales de $\overline{O_1A_1}$, $\overline{O_2A_2}$ et $\overline{O_1A'}$ en se plaçant dans l'approximation paraxiale.**

**b. Faire l'application numérique pour $h$ = 50 cm, $e$ = 3 cm et $n$ = 1,5.**

**2. Montrer que quel que soit $h$, ce système se comporte comme un miroir dont on déterminera la position. On notera $O_3$ le point de ce miroir appartenant à la droite $O_1O_2$ et on exprimera $\overline{O_3O_3}$.**

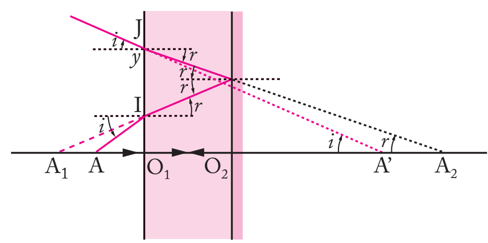
### Solution

Le système optique étudié est formé d'une lame et d'un miroir ; un rayon lumineux incident sur le système rencontre donc le dioptre air/verre, le miroir sur lequel il est réfléchit puis rencontre à nouveau un dioptre (verre/air). Il faut donc déterminer les images successives de l'objet A à travers un dioptre, un miroir et à nouveau un dioptre. Si l'image définitive de A est notée A', on dira que le système est équivalent à un miroir si on peut établir une relation de conjugaison de miroir entre A et A', c'est-à-dire que le milieu de AA' est un point fixe quelle que soit la position de A.

**1.a.** Le schéma synoptique pour cet ensemble (lame + miroir) s'écrit :

$$A \xrightarrow{\text{dioptre air/verre}} A_1 \xrightarrow{\text{miroir}} A_2 \xrightarrow{\text{dioptre verre/air}} A'$$

Traçons la marche d'un rayon issu de A à travers le système :




Considérons les différents couples du schéma.

Dans les triangles $AIO_1$ et $A_1IO_1$, on écrit : $\tan i = \dfrac{\overline{O_1I}}{\overline{AO_1}}$ et $\tan r = \dfrac{\overline{O_1I}}{\overline{A_1O_1}}$

La loi de réfraction de Descartes s'écrit $\sin i = n \sin r$. Par ailleurs, pour de faibles angles $i$ (approximation paraxiale), on a :

$$\sin i \approx \tan i \approx i \text{ et } \sin r \approx \tan r \approx r$$

On obtient finalement : $\overline{O_1A_1} = n\,\overline{O_1A} = -nh$

L'image $A_2$ de $A_1$ à travers le miroir vérifie $\overline{O_2A_2} = -\overline{O_2A_1}$. Avec $\overline{O_2A_2} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e - nh$, il vient finalement : $\overline{O_2A_2} = e + nh$

Dans les triangles $A_2JO_1$ et $A'JO_1$, on a : $\tan i = \dfrac{\overline{O_1J}}{\overline{A'O_1}}$ et $\tan r = \dfrac{\overline{O_1J}}{\overline{A_2O_1}}$

En appliquant la loi de réfraction de Descartes dans l'approximation paraxiale :

$$\overline{O_1A'} = \frac{\overline{O_1A_2}}{n} = \frac{(\overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_2})}{n}$$

$$\overline{O_1A'} = \frac{2e}{n} + h$$

**b.** L'application numérique donne : $\overline{O_1A_1} = -nh = -75\,\text{cm}$ ; $\overline{O_2A_2} = e + nh = 78\,\text{cm}$ ; $\overline{O_1A'} = \dfrac{2e}{n} + nh = 54\,\text{cm}$.

**2.** Le système se comporte comme un miroir si, quelle que soit la position de A (donc quelle que soit $h$), on peut écrire une relation de la forme : $\overline{O_3A'} = -\overline{O_3A}$ où $O_3$ est un point de ce miroir appartenant à la droite $O_1O_2$. Supposons cette condition vérifiée et montrons que $O_3$ existe. On a :

$$\overline{O_3A'} = \overline{O_3O_1} + \overline{O_1A'} = \overline{O_3O_1} + \frac{2e}{n} + h$$

$$\overline{O_3A} = \overline{O_3O_1} + \overline{O_1A} = \overline{O_3O_1} - h$$

Traduisons l'existence de $O_3$ :

$$\overline{O_3O_1} + \frac{2e}{n} + h = -\overline{O_3O_1} - h$$

$O_3$ existe donc bien et on a quelle que soit la valeur de $h$ : $\overline{O_1O_3} = \dfrac{e}{n}$

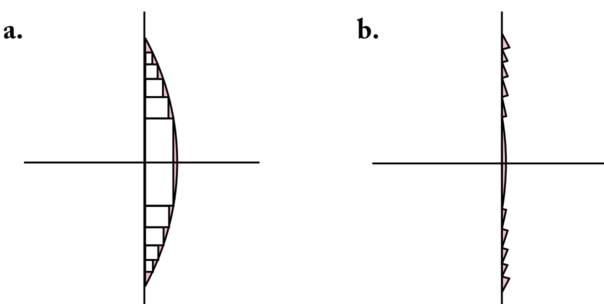
A.N. $\overline{O_1O_3} = 27$ cm.

# Lentilles épaisses et lentilles minces

Un peu d'histoire

## Les lentilles de Fresnel

L'opticien français Augustin Fresnel (1788-1827) a laissé son nom à un type de lentilles caractérisées par leur grande taille. Il est très difficile voire impossible de fabriquer des lentilles de grande taille, d'une part parce que leur masse trop importante entraîne des déformations sous l'action de la gravité, d'autre part parce qu'elles induisent une importante absorption.
A. Fresnel eut l'idée de remplacer le bloc compact de verre par une lentille centrale type plan convexe, reliée sur les bords à des anneaux et des segments d'anneaux en forme de prisme. Le système ainsi constitué, moins lourd, ne se déforme pas, et est l'équivalent optique d'une lentille convexe de grand diamètre. Le principe de fabrication d'une lentille de Fresnel est illustré sur le schéma ci-dessous. Les parties colorées de la lentille plan convexe (**a**) sont découpées puis repositionnées pour former une lentille équivalente mais plus légère (**b**).




Les caractéristiques techniques de ce système optique permettent en particulier d'augmenter la puissance lumineuse des phares en remplaçant les anciens miroirs réflecteurs par des prismes.
C'est le verrier de Fresnel, Monsieur Soleil qui le seconda en entreprenant la construction de ces grandes lentilles. Le phare de Cordouan installé sur les côtes de Charentes fut le premier à être équipé de ce système.

## 1. Système centré

On appelle **système centré** un système formé d'une suite de milieux homogènes séparés par des dioptres ayant la même symétrie de révolution. Les centres des dioptres sont alignés sur l'axe du système.
Un système centré est utilisé dans l'**approximation de Gauss** s'il n'est traversé que par des rayons proches de l'axe et faisant avec celui-ci un angle faible (on parle de rayons paraxiaux).
Dans l'approximation de Gauss, le **stigmatisme approché** est réalisé, et tout point A situé sur l'axe admet un point conjugué A' ; de plus, si P et P' désignent les plans perpendiculaires à l'axe et passant par A et A', tout point B de P et situé au voisinage de A admet un point conjugué B' dans P' : c'est l'**aplanétisme**. La relation qui lie les positions des plans conjugués est la **relation de conjugaison**.

## 2. Lentilles

### 2.1. Définitions

Une **lentille** est un milieu transparent homogène limité par deux dioptres ; très souvent, les dioptres sont sphériques mais l'un d'eux peut être plan. La lentille est dite **mince**, si son épaisseur maximum est très petite devant les rayons de courbure des dioptres.

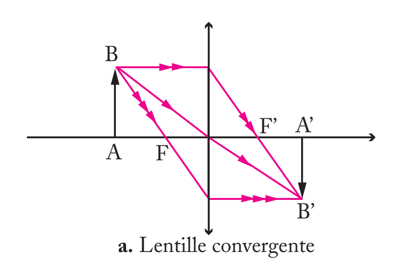
Lorsque la lentille sépare deux milieux de mêmes indices, les mesures algébriques $\overline{FO}$ et $\overline{OF'}$ sont égales et on appelle $f'$ **distance focale** cette mesure algébrique :

$$f' = \overline{FO} = \overline{OF'}$$

La vergence $V$ de la lentille est définie par :

$$V = \frac{1}{f'}$$

La lentille est dite **divergente** si $f' < 0$ . La lentille est dite **convergente** si $f' > 0$.




**a.** Lentille convergente

**b.** Lentille divergente

### 2.2. Lentille mince

On définit pour une lentille mince trois points particuliers :
- tout rayon passant par le centre optique de la lentille O n'est pas dévié ;
- tout point passant par le point focal objet F de la lentille émerge de la lentille parallèlement à son axe optique ;
- tout rayon parallèle à l'axe optique émerge de la lentille en passant par le point focal image F'.

La **relation de conjugaison** d'une lentille mince, dite **relation de Descartes**, s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

La **relation de conjugaison** d'une lentille mince, dite **relation de Newton**, s'écrit :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2$$

Le **grandissement linéaire** $\gamma$ de la lentille est égale à :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

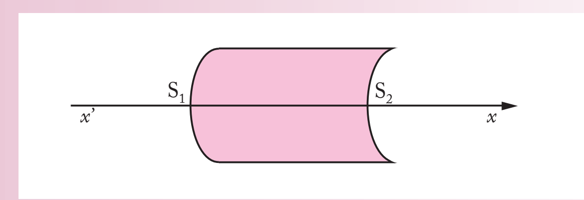
La **vergence** $V_{1,2}$ de deux lentilles minces accolées est égale à la somme des vergences $V_1$ et $V_2$ des deux lentilles :

$$V_{1,2} = V_1 + V_2$$

# Lentilles épaisses

## Exercice 1 Étude d'un système centré

On considère un système centré constitué d'un cylindre en verre d'indice $n$. Les extrémités du cylindre sont limitées par les deux demi-sphéres de rayon $R_1 = \overline{S_1C_1}$ (face d'entrée) et $R_2 = \overline{S_2C_2}$ (face de sortie) où $S_1$ et $S_2$ sont les intersections de l'axe optique $x'x$ du système avec respectivement la face d'entrée et la face de sortie. Le système est plongé dans l'air d'indice égal à 1. On donne la distance $\overline{S_1S_2} = 2R_1$.




**1. Déterminer la position, par rapport à $S_1$, du foyer image $F'_1$ du dioptre de sommet $S_1$. Calculer la valeur numérique de $\overline{S_1F_1'}$.**

**2. Définir le foyer image F′ du système et déterminer sa position. Calculer la valeur numérique de $\overline{S_2F'}$.**

**3. Montrer que la position du foyer image F′ ne varie pas lorsque l'indice $n$ varie légèrement au voisinage de la valeur $n = 1{,}5$.**

**A.N. $R_1 = 14$ cm, $R_2 = R_1/7 = 2$ cm, $n = 1{,}5$.**

### Solution

**CONSEIL :** cet exercice ne présente pas de difficulté particulière. La lentille étudiée est une lentille épaisse formée de deux dioptres sphériques. Dans ce cas, nous ne connaissons pas, a priori, les positions des points focaux puisque nous n'avons pas de relation de conjugaison pour une lentille épaisse. Il faut donc revenir aux définitions générales : le point focal image est l'image, à travers la succession des deux dioptres sphériques, d'un objet situé à l'infini ; le point focal objet forme, à travers la succession des deux dioptres sphériques, son image à l'infini.

**1.** $F'_1$ est l'image d'un objet à l'infini à travers le dioptre 1 de sommet $S_1$, de rayon de courbure $R_1$ et qui sépare un milieu d'indice 1 et un autre d'indice $n$. La relation de conjugaison pour le dioptre s'écrit :

$$\frac{n}{\overline{S_1A_2}} - \frac{1}{\overline{S_1A_1}} = \frac{n-1}{\overline{S_1C_1}} = \frac{n-1}{R_1}$$

où $A_1$ est un objet qui donne l'image $A_2$ à travers le dioptre 1.

Appliquons cette relation à $F'_1$, image d'un point objet à l'infini :

$$\frac{n}{\overline{S_1F'_1}} = \frac{n-1}{R_1}$$

Soit

$$\overline{S_1F'_1} = \frac{n}{n-1}R_1$$

A.N. $\overline{S_1F'_1} = 42$ cm.

**2.** Le foyer image du système est l'image d'un point objet situé à l'infini à travers le système constitué des deux dioptres. D'après la première question, un objet à l'infini forme, à travers le dioptre 1, son image en $F'_1$. On a donc le schéma synoptique suivant :

$$\text{Objet à l'infini} \xrightarrow{\text{dioptre 1}} F'_1 \xrightarrow{\text{dioptre 2}} F$$

Écrivons la relation de conjugaison pour le second dioptre de sommet $S_2$, de rayon de courbure $R_2$ qui sépare un milieu d'indice $n$ et un autre d'indice 1. Pour ce dioptre, l'objet $F'_1$ forme son image en F'.

$$\frac{1}{\overline{S_2F'}} - \frac{n}{\overline{S_2F'_1}} = \frac{1-n}{\overline{S_2C_2}} = \frac{1-n}{R_2}$$

Avec $\overline{S_1S_2} = 2R_1$, il vient :

$$\frac{1}{\overline{S_2F'}} - \frac{n}{\overline{S_2S_1} + \overline{S_1F'_1}} = \frac{1}{\overline{S_2F'}} - \frac{n}{-2R_1 + \overline{S_1F'_1}}$$

$$\frac{1}{\overline{S_2F'}} - \frac{n}{-2R_1 + \dfrac{n}{n-1}R_1} = \frac{1}{\overline{S_2F'}} - \frac{n(n-1)}{(2-n)R_1}$$

$$\frac{1}{\overline{S_2F'}} = \frac{n(n-1)}{(2-n)R_1} + \frac{1-n}{R_2}$$

Soit finalement :

$$\overline{S_2F'} = \frac{2-n}{1-n}\,\frac{R_1R_2}{(2-n)R_1 - nR_2}$$

A.N. $\overline{S_2F'} = -28$ cm.

**3.** Posons $x(n) = \dfrac{1}{\overline{S_2F'}}$. Pour une faible variation d$n$ de $n$, montrons que la variation d$x$ est nulle, ce qui signifiera que la position de F' ne change pas.

$$\mathrm{d}x(n) = \left[\frac{2n-1}{(2-n)R_1} + \frac{n^2-n}{(2-n)^2R_1} - \frac{1}{R_2}\right]\mathrm{d}n$$

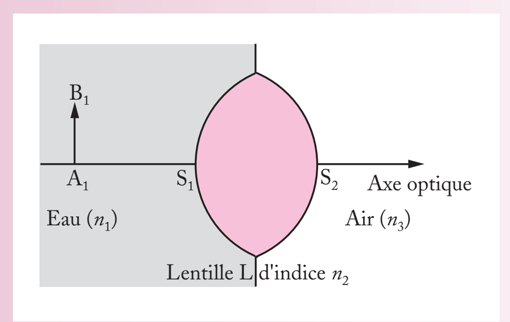
$$\mathrm{d}x(n) = \left[\frac{-n^2+4n-2}{(2-n)^2R_1} - \frac{1}{R_2}\right]\mathrm{d}n$$

Remarquons que $\dfrac{-n^2+4n-2}{(2-n)^2R_1} = 0{,}5$. De même $\dfrac{1}{R_2} = 0{,}5$. Il vient donc d$x(n) = 0$ ce qui termine la démonstration.

## Exercice 2 Lentille équiconvexe

Une lentille L équiconvexe (convergente) en verre d'indice $n_2$ est limitée par deux dioptres sphériques, notés 1 et 2, de centres $C_1$ et $C_2$ et dont les rayons respectifs $R_1$ et $R_2$ sont tels que : $|R_1| = |R_2| = R$. La lentille est un élément d'une paroi séparant deux compartiments, l'un rempli d'eau d'indice $n_1$, l'autre contenant de l'air d'indice $n_3$.

Un objet réel $A_1B_1$, de longueur 10 mm, est placé dans l'eau, à 20 cm du centre optique S de la lentille. Les conditions de Gauss sont respectées.




**1.a. Écrire la relation de conjugaison pour le dioptre 1 de sommet $S_1$ entre les points conjugués $A_1$ et $A_2$ (situés sur l'axe optique).**

**b. Exprimer la relation de conjugaison pour le dioptre 2 de sommet $S_2$ entre les points conjugués $A_2$ et $A_3$.**

**2.a. La lentille L est mince : on confond $S_1$, $S_2$ et S, le centre optique de la lentille. La lentille L donne d'un point objet $A_1$ un point image $A_3$.**

**On note $\overline{S_1A_1} \cong \overline{SA_1} = p$ et $\overline{S_2A_3} \cong \overline{SA_3} = p'$.**

**Calculer $(n_3/p') - (n_1/p)$ et déterminer la relation de conjugaison de la lentille entre les points $A_1$ et $A_3$. Cette relation ne doit contenir que les seules constantes $n_1$, $n_2$, $n_3$, $R$ et les variables $p$ et $p'$.**

**b. Calculer les distances focales objet $f$ et image $f'$ de L.**

**c. Calculer la position $p'$ de l'image $\overline{A_3B_3}$.**

**3.a. Calculer le grandissement linéaire $\gamma = \dfrac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_1B_1}} = \gamma_1\gamma_2$ où $\gamma_1$ et $\gamma_1$ sont les grandissements correspondant respectivement aux dioptres 1 et 2.**

**b. Déterminer la taille de l'image $\overline{A_3B_3}$.**

**A.N. $n_1 = 1{,}325$ ; $n_2 = 1{,}500$ ; $n_3 = 1{,}000$ ; $R = 0{,}25$ m.**

### Solution

**CONSEIL :** cet exercice ne pose pas de difficulté majeure. On peut se laisser guider par l'énoncé.

**1.a.** La relation de conjugaison pour le dioptre 1 s'écrit :

$$\frac{n_2}{\overline{S_1A_2}} - \frac{n_1}{\overline{S_1A_1}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{S_1C_1}} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

**b.** La relation de conjugaison pour le dioptre 2 s'écrit :

$$\frac{n_3}{\overline{S_2A_3}} - \frac{n_2}{\overline{S_2A_2}} = \frac{n_3 - n_2}{\overline{S_2C_2}} = -\frac{n_3 - n_2}{R}$$

**2.a.** Avec les notations de l'énoncé et $S_1 = S_2 = S$, les relations de conjugaison s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{n_2}{\overline{SA_2}} - \dfrac{n_1}{p} = \dfrac{n_2 - n_1}{R} \\[2ex] \dfrac{n_3}{p'} - \dfrac{n_2}{\overline{SA_2}} = -\dfrac{n_3 - n_2}{R} \end{cases}$$

En sommant les deux expressions, on obtient la relation de conjugaison de la lentille :

$$\frac{n_3}{p'} - \frac{n_1}{p} = \frac{2n_2 - n_1 - n_3}{R}$$

**b.** La distance focale objet $f$ est égale à $p = \overline{SA_1}$ lorsque l'image est renvoyée à l'infini ($p' = \infty$). La relation de conjugaison donne alors :

$$-\frac{n_1}{f} = \frac{2n_2 - n_1 - n_3}{R}$$

Soit

$$f = \frac{-n_1}{2n_2 - n_1 - n_3} R$$

La distance focale objet $f'$ est égale à $p' = \overline{SA_3}$ lorsque l'objet est à l'infini ($p = \infty$). La relation de conjugaison s'écrit donc :

$$\frac{n_3}{f'} = \frac{2n_2 - n_1 - n_3}{R} R$$

Soit

$$f' = \frac{n_3}{2n_2 - n_1 - n_3} R$$

A.N. $f = -0{,}49$ m. $f' = 0{,}37$ m.

**c.** On peut donc exprimer la relation de conjugaison en fonction de $f$.

$$\frac{n_3}{p'} - \frac{n_1}{p} = -\frac{n_1}{f}$$

On en déduit la position $p'$ de $A_3B_3$, connaissant la position de l'objet $A_1B_1$ :

$$p' = \frac{n_3}{n_1} \frac{fp}{f - p}$$

A.N. Avec $p = -20$ cm, $p' = -25{,}5$ cm.

**3.a.** Le grandissement $\gamma$ des deux dioptres se déduit des grandissements $\gamma_1$ et $\gamma_2$ :

$$\gamma_1 = \frac{n_1\overline{SA_2}}{n_2\overline{SA_1}} = \frac{n_1\overline{SA_2}}{n_2 p}$$

$$\gamma_2 = \frac{n_2\overline{SA_3}}{n_3\overline{SA_2}} = \frac{n_2 p'}{n_3\overline{SA_2}}$$

Soit

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2 = \frac{n_1 p'}{n_3\, p} = \frac{f}{f-p}$$

A.N. $\gamma$ = 1,69 mm.

**b.** On déduit de l'expression de $\gamma$ la taille de $A_3B_3$ :

$$A_3B_3 = \gamma A_1B_1 = \frac{f}{f-p}A_1B_1$$

A.N. $A_3B_3$ = 16,9.

## Exercice 3 La loupe de Stanhope

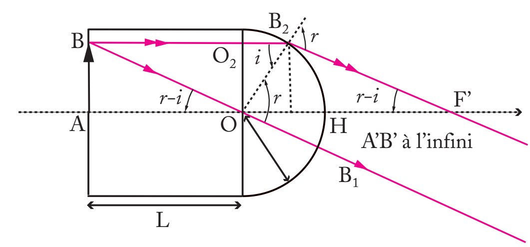
La loupe de Stanhope est un système constitué d'un petit bloc de verre d'indice $n$ terminé par une face plane d'un côté et une face sphérique (rayon de courbure $R$) de l'autre. On accole à la face plane un petit objet AB.

**1. Quelle longueur *L* doit avoir le bloc de verre pour que l'image de l'objet AB se forme à l'infini ?**

**2. Déterminer la position du foyer image F' de la loupe.**

### Solution

**1.**




Pour que l'image de l'objet AB se forme à l'infini, il faut que les rayons issus de B (par exemple) émergent du système en formant un faisceau de rayons parallèles. Sur la figure ci-dessus, cela revient à dire que l'angle $\widehat{B_1OB_2} = r$, $r$ étant l'angle de réfraction du rayon $BB_2$ du verre dans l'air : $n \sin i = \sin r$. Dans l'approximation des faibles angles, cette relation s'écrit :

$$n\, i = r$$

Dans le triangle $OO_2B_2$, on a également :

$$i \approx \sin i = \frac{AB}{R} \quad \text{et} \quad OO_2 = AB$$

d'où

$$r \approx n\frac{AB}{R}$$

Si l'image de AB se forme à l'infini, on a dans le triangle OAB : $(\widehat{BOA}) = r - i$. Par ailleurs,

$(\widehat{BOA})$ vérifie $(r - i) \approx \tan(r - i) = \dfrac{AB}{L}$. Finalement, la condition pour que l'image de AB se forme à l'infini s'écrit : $\dfrac{AB}{L} = (n-1)\,\dfrac{AB}{R}$, soit :

$$L = \frac{R}{n-1}$$

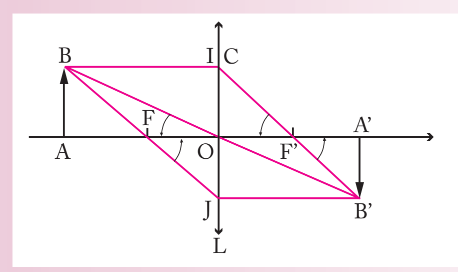
**2.** Le point focal image de la lentille de Stanhope est, par définition, l'image d'un objet situé à l'infini sur l'axe optique. Soit H le projeté de $B_2$ sur l'axe optique, on a HF' $= L$ car les triangles $B_2$ HF' et BAO sont identiques. Par ailleurs OH $\approx R$ dans l'approximation paraxiale (car $BB_2$ est proche de l'axe). On en déduit :

$$SF' \approx HF' = L$$

# LENTILLES MINCES

## Exercice 4 La formule de conjugaison de Newton

On considère l'image A'B' réelle d'un objet réel AB à travers une lentille convergente L.




**1. Montrer que** $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{f'}{\overline{FA}}$.

**2. Établir la formule de conjugaison de Newton** $\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = -f'^2$.

### Solution

**CONSEIL :** cet exercice consiste à établir la formule de conjugaison de Newton d'une lentille mince en raisonnant sur les propriétés géométriques de rayons particuliers émis par l'objet (le rayon passant par le centre optique de la lentille, le rayon parallèle à l'axe optique et celui passant par le point focal objet). Il s'agit donc d'une question de cours, à connaître absolument !

**1.** Les deux triangles rectangles ABF et JOF sont semblables. Avec $\overline{A'B'} = \overline{OJ}$ et $f' = \overline{FO}$, on a donc :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

soit

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f'}{\overline{FA}}$$

**2.** Les triangles rectangles OIF' et F'A'B' sont semblables, on a donc :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

soit, avec $f' = \overline{OF'}$ :

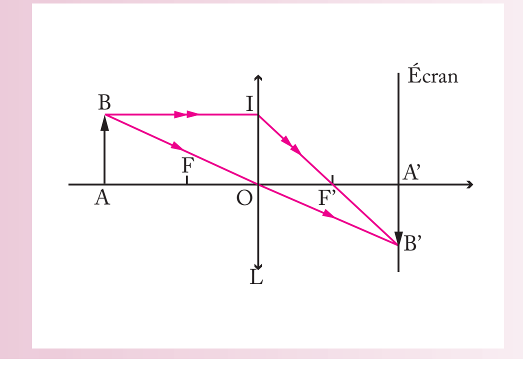
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

Des deux expressions de $\gamma$, on obtient $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f^2 = -f'^2$

## Exercice 5 Détermination de la distance focale d'une lentille en fonction du grandissement

On réalise l'image d'un objet réel à travers une lentille convergente de distance focale $f'$. L'image est recueillie sur un écran, situé à une distance $D$ de la lentille. On note $a$ la valeur absolue du grandissement.

**Exprimer la distance focale $f'$ de la lentille en fonction de $D$ et $a$.**




### Solution

**CONSEIL : cet exercice ne pose pas de difficulté particulière.**

Pour que la lentille donne de l'objet réel une image réelle, c'est-à-dire que l'on peut observer sur un écran, il faut que l'objet soit situé avant le point focal objet. le grandissement est alors négatif. On en déduit :

$$a = -\gamma = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

La loi de conjugaison de Descartes s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Avec $\overline{OA'} = D$ et $\overline{OA} = -\frac{D}{a}$, il vient finalement :

$$f' = \frac{aD}{1+a}$$

## Exercice 6 Relations entre position de l'objet, distance objet/image et grandissement

On considère une lentille mince convergente L de centre optique O et de distance focale $f'$. Sur l'axe optique de L, on dispose d'un petit objet ponctuel lumineux A ; on repère la position de cet objet par rapport à la lentille par $x = \overline{OA}$. L'image A' de A à travers la lentille est repérée par $x' = \overline{OA'}$.

**1.a. Établir la relation donnant la quantité $y = \overline{AA'}$ en fonction de $x$ et de $f'$.**

**b. Tracer la courbe représentant $y$ en fonction de $x$.**

**2.a. Donner l'expression du grandissement $\gamma$ en fonction de $x$ et de $f'$.**

**b. Tracer la courbe de $\gamma$ en fonction de $x$.**

**3.a. En déduire $y$ en fonction de $\gamma$ et de $f'$.**

**b. Tracer la courbe de variation de $y$ en fonction de $\gamma$. Préciser notamment les valeurs de $y$ pour lesquelles $\gamma = 1$ et $\gamma = -1$.**

### Solution

**CONSEIL : l'énoncé de cet exercice est très détaillé. Vous pouvez vous laisser guider par les questions.**

**1.a.** On cherche à calculer la valeur algébrique $y = \overline{AA'} = x' - x$, en fonction de $x$ et de $f'$.

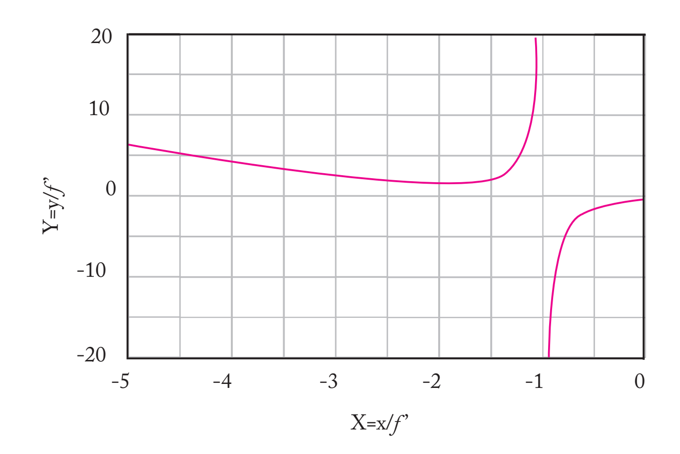
A' est l'image de A à travers la lentille L, on a donc : $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$, soit $x' = \frac{xf'}{x+f'}$. On en déduit la fonction $y$ :

$$y(x) = -\frac{x^2}{x+f'}$$

L'objet A est un objet réel ; il faut donc étudier $y$ pour $x \in ]-\infty ; 0]$. Posons $Y = \frac{y}{f'}$ et $X = \frac{x}{f'}$ ; il vient :

$$Y = -\frac{X^2}{X+1}$$

**b.**



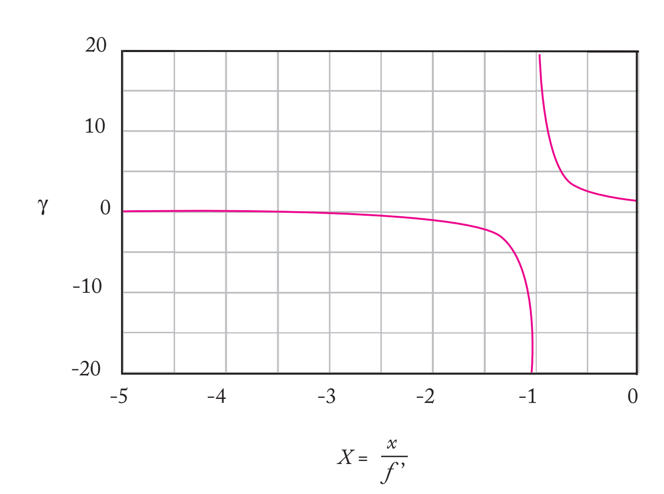

**2.a.** Le grandissement γ est défini par : $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA} + \overline{AA'}}{\overline{OA}}$ , soit :

$$\gamma = 1 + \frac{y}{x} = \frac{f'}{x + f'}$$

On a donc :

$$\gamma = \frac{1}{X + 1}$$

**b.**



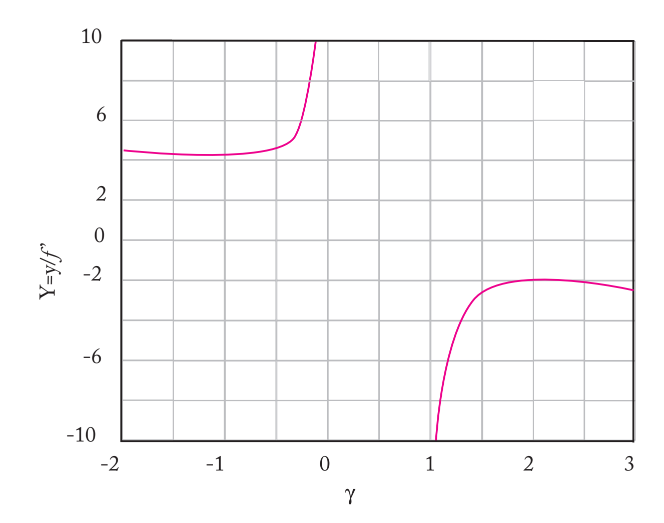

**3.a.** La seconde relation établie permet d'exprimer $x$ en fonction de γ et $y$ :

$$x = \frac{1 - \gamma}{\gamma} f'$$

On reporte l'expression de $x$ dans la première relation :

$$y = -\frac{(1 - \gamma)^2}{\gamma} f'$$

**b.**




Lorsque $\gamma = 1$, on a $y = 0$. On a alors $x = 0$, l'image et l'objet sont accolés à la lentille. lorsque $\gamma = -1$, on a $y = 4f'$. On retrouve le résultat exploité dans la méthode de focométrie dite de Silbermann (voir exercice 9, chapitre 5) ; pour un grandissement égal à −1, l'image et l'objet sont distants de $4f'$. On a alors $x = -2f'$.

## Exercice 7 Obtention d'images avec une lentille mince convergente

On rappelle que la marche des rayons lumineux à travers une lentille convergente vérifie les propriétés suivantes :

- un rayon passant par O, centre optique de la lentille n'est pas dévié ;
- un rayon incident parallèle à l'axe optique $\Delta$ émerge de la lentille en convergeant vers F', point focal image de la lentille ;
- un rayon incident qui passe par le point focal objet F émerge de la lentille parallèle à $\Delta$.

**1. Déterminer géométriquement la position de l'image A'B' d'un objet AB en fonction de la distance objet-lentille. On étudiera le cas d'une lentille mince convergente dans les trois cas suivants et on précisera dans chaque cas la nature de l'image obtenue :**

**a. l'objet est réel, situé avant le point focal objet F ;**

**b. l'objet est réel, placé entre le point focal objet F et le centre optique O de la lentille.**

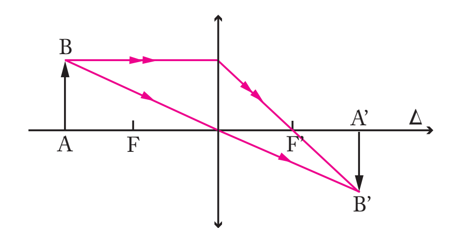
**c. l'objet est virtuel.**

**2. Dans chaque cas étudié, préciser si le calcul du grandissement linéaire ou du grossissement de l'objet est possible.**

### Solution

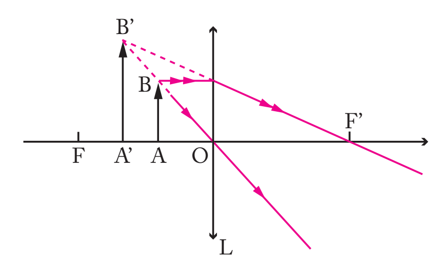
**CONSEIL : cet exercice est une application directe du cours. Il s'agit de déterminer, par une construction géométrique, les caractéristiques de l'image d'un objet à travers une lentille mince. On utilisera bien sûr les propriétés de rayons particuliers.**

**1.a.**



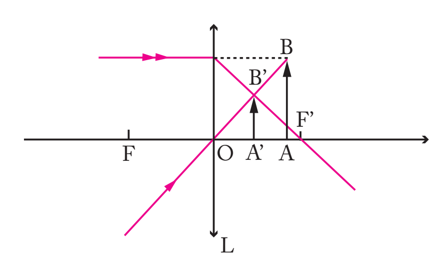

Lorsque l'objet réel est placé devant F, l'image obtenue est plus grande que $\overline{AB}$ et on obtient une image réelle. En éloignant l'objet réel du plan focal objet, on obtient toujours une image réelle inversée dont la taille diminue. L'objet $\overline{AB}$ placé à $2f$ de la lentille est un cas particulier utilisé en focométrie (voir exercice 8, chapitre 5, méthode de Bessel). L'objet $\overline{AB}$ placé à l'infini, c'est-à-dire à au moins $5f$ de la lentille est également utilisé en focométrie (voir exercice 7, chapitre 5, méthode de l'objet éloigné).

**b.**




L'objet est réel et il est maintenant situé entre le foyer objet F et le centre optique O de la lentille L. À la sortie de L, le faisceau de rayons provenant de AB diverge. On obtient une image virtuelle agrandie et droite.

**c.**




L'objet est virtuel et placé entre O et F' : l'image est réelle, droite et de taille inférieure à celle de AB.

**2.** Le grandissement linéaire peut être calculé sauf si l'objet est à l'infini, ou si l'image est à l'infini. Le grossissement peut, lui, toujours être calculé car l'angle sous lequel est vu l'objet à l'infini (ou une image à l'infini) est fini (mesurable).

## Exercice 8 Images à travers une lentille mince divergente

**1. Déterminer géométriquement la position de l'image d'un objet AB en fonction de la position de l'objet face à une lentille mince divergente. On note *f'* la distance focale de la lentille, O son centre, F et F' respectivement ses points focaux objet et image. On étudiera le cas de la lentille mince divergente dans les trois cas suivants :**

**a. l'objet est réel ;**

**b. l'objet est virtuel entre O et F ;**

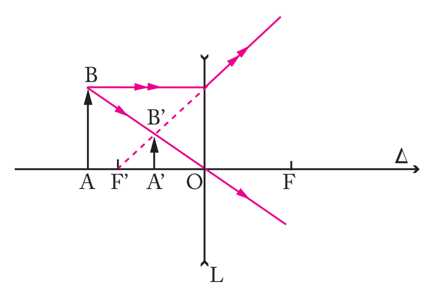
**c. l'objet est virtuel au-delà de F.**

**2. Quelle différence d'observation y a-t-il entre une image réelle et une image virtuelle ?**

### Solution

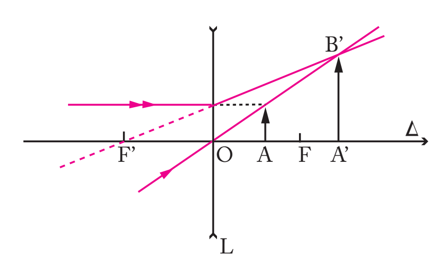
**CONSEIL : cet exercice est, dans l'esprit, identique au précédent.**

**1.a.** La figure ci-dessous montre la construction géométrique de l'image A'B' de l'objet AB.



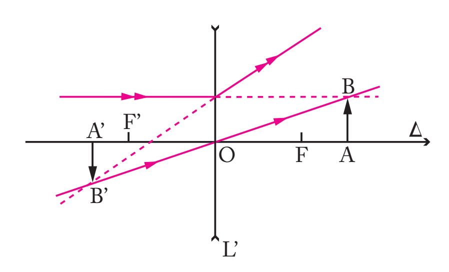

L'image se forme dans l'espace objet, elle est donc virtuelle, plus petite que $\overline{AB}$ et droite.

**b.**




Pour un objet virtuel, situé entre O et F, on obtient une image réelle, droite, plus grande que l'objet.

**c.**



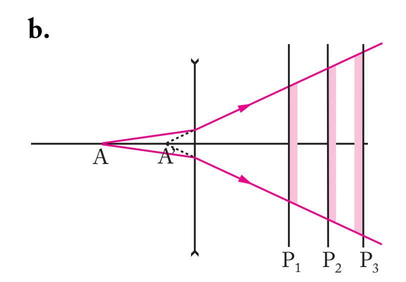
L'objet est virtuel et placé au-delà du plan focal objet F. On obtient une image virtuelle inversée.

**2.** Une image, qu'elle soit réelle ou virtuelle, peut être observée à l'œil nu ; si l'image est réelle, il faut que l'œil soit placé derrière l'image de façon à recueillir un faisceau divergent. Ainsi, à l'œil nu, on ne peut pas distinguer une image réelle d'une image virtuelle. À l'inverse, un écran permet de distinguer l'image réelle d'une image virtuelle. À l'aide d'un écran, on peut visualiser une image réelle (donc visible) ce qui n'est pas le cas d'une image virtuelle. Dans le cas d'une image réelle (**a**), on obtient une image nette sur l'écran. si l'image est virtuelle (**b**), cela n'est pas possible : en déplaçant l'écran, on recueille une tache dont la taille diminue lorsque l'on approche l'écran de la lentille.

**a.**

A A' $P_1$ $P_2$ $P_3$

**b.**




## Exercice 9 Image d'un objet à travers une lentille mince

**1. Un objet AB de 3 cm est placé à 8 cm devant une lentille convergente de distance focale 20 cm. Déterminer la position et la nature de son image.**

**2. À travers cette lentille, on veut obtenir d'un objet réel une image réelle quatre fois plus grande que l'objet. À quelles distances de l'objet faut-il placer la lentille et l'écran ?**

### Solution

**CONSEIL :** cet exercice comporte deux questions indépendantes. Il s'agit, dans la première question, de donner les caractéristiques de l'image A'B' d'un objet AB à travers une lentille mince convergente ; c'est une application directe du cours. Dans la deuxième question, il faut traduire l'énoncé : l'image est réelle et quatre fois plus grande que l'objet. Si l'image est réelle et agrandie, le grandissement est nécessairement négatif ($\gamma = -4$) ; il reste à écrire la relation de conjugaison sur $\overline{OA} = x$ et $\overline{OA'} = \gamma x$ pour conclure.

**1.** La relation de conjugaison des lentilles donne pour l'image A' de A à travers la lentille de centre O et de distance focale $f'$ :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

On en déduit la position de A' :

$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}\,f'}{\overline{OA} + f'}$$

A.N. D'après l'énoncé $\overline{OA} = -8$ cm. $\overline{OA'} = -13{,}3$ cm. Donc A'B' est une image virtuelle. Pour déterminer la taille de l'image, on utilise le grandissement de la lentille. Le grandissement $\gamma$ donne la taille de l'image $\overline{A'B'}$ en fonction de la taille de l'objet $\overline{AB}$ :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

$$\overline{A'B'} = \gamma \overline{AB}$$

A.N. $\gamma = \dfrac{13,3}{8}$. $\overline{A'B'} = 5$ cm. L'image est virtuelle, droite et plus grande que l'objet.

**2.** On veut obtenir de l'objet AB une image A'B' réelle et quatre fois plus grande. Si l'image est réelle, elle est renversée. On veut donc un grandissement $\gamma$ négatif, égal à $-4$.

Posons $\overline{OA} = x$, il vient $\overline{OA'} = \gamma x$. On écrit la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\gamma x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

On obtient $x$ :

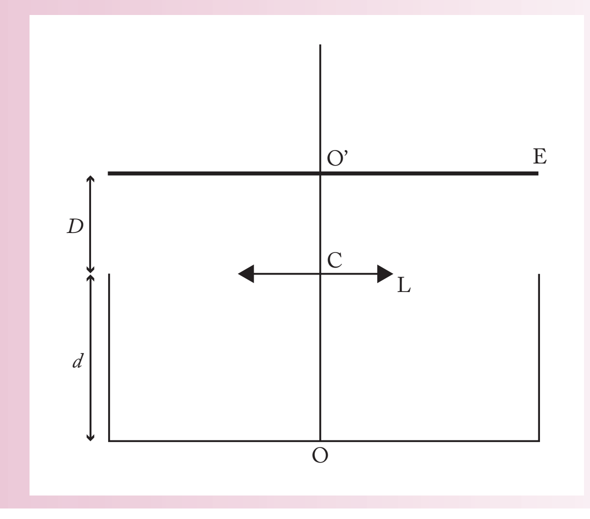
$$\overline{OA} = x = \frac{(1-\gamma)f'}{\gamma} = -16 \text{ cm}$$

$$\overline{OA'} = (1-\gamma)f' = 80 \text{ cm.}$$

Il faut donc placer la lentille à 16 cm de l'objet et l'écran à 80 cm.

## Exercice 10 Image à travers un système dioptre/lentille

On projette sur un écran l'image d'un petit objet O placé au fond d'une cuve. Au-dessus de la cuve, à une distance $d = 20$ cm du fond, on place une lentille convergente de distance focale $f' = 10$ cm.

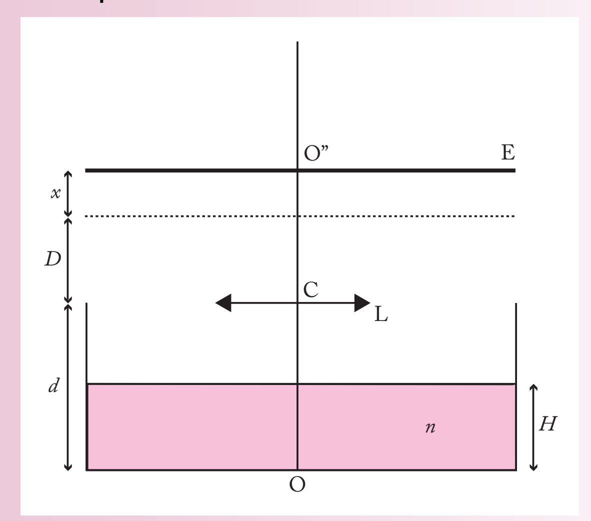


La cuve est vide. On obtient une image nette de l'objet O sur l'écran E lorsque l'écran est placé à la distance $D$ derrière la lentille.

**1.a. Donner l'expression de la distance *D* de la lentille à l'écran en fonction de *d* et *f '*.**

**b. Calculer *D*.**

**On remplit la cuve d'un liquide d'indice *n* sur une hauteur *H* = 15 cm.**




**Pour observer une image nette de O sur l'écran, on doit reculer celui-ci d'une distance *x*.**

**Exprimer la distance *d'* par rapport à la lentille de l'image de O par le dioptre. On se placera dans l'approximation paraxiale.**

**3. Calculer *n* en fonction de *d*, *x*, *f'* et *H*.**

## Solution

**CONSEIL : cet exercice comporte deux « parties » ; dans la première, le système étudié est simplement constitué d'une lentille de projection, donc convergente ; il suffit de traduire le fait que l'écran doit recueillir l'image de l'objet placé au fond de la cuve.**
**Dans la deuxième partie, la cuve étant partiellement remplie d'eau, l'objet forme son image à travers la succession dioptre eau/air et lentille. Il faut traduire maintenant le fait que la position de l'image a changée, la nouvelle position de l'image étant à la distance *x* de l'ancienne.**

**1.** Lorsque la cuve est vide, la lentille de centre C donne de O une image O' sur l'écran : O et O' sont deux points conjugués qui vérifient la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{CO'}} - \frac{1}{\overline{CO}} = \frac{1}{f'}$$

On en déduit la distance $D$ :

$$D = \overline{CO'} = \frac{\overline{CO}\,f'}{\overline{CO} + f'}$$

Avec $\overline{CO} = -d$, on a donc :

$$D = \frac{df'}{d - f'},$$

A.N. $D$ = 20 cm.
Notons que $D$ est bien une quantité positive car l'objet O donne une image O' réelle si et seulement si il est placé avant le point focal objet, soit si $d > f'$.

**2.** Le schéma synoptique s'écrit ici : $\mathrm{O} \xrightarrow{\text{liquide/air}} \mathrm{O'} \xrightarrow{\text{lentille L}} \mathrm{O''}$. O' est l'image de O à travers le dioptre liquide/air : notons M le point de l'interface à la verticale de O, on a :

$$\frac{\overline{\mathrm{MO}}}{n} = \frac{\overline{\mathrm{MO'}}}{1}$$

Avec $\overline{\mathrm{CM}} = H - d < 0$ et $\overline{\mathrm{MO}} = -H$, il vient :

$$\overline{\mathrm{CO'}} = \overline{\mathrm{CM}} + \overline{\mathrm{MO'}} = H - d - \frac{H}{n} = H\left(1 - \frac{1}{n}\right) - d$$

Finalement :

$$d' = H\left(1 - \frac{1}{n}\right) - d$$

**3.** O' devient objet pour la lentille L et O'' son image ; on a donc :

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{CO''}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{CO'}}} = \frac{1}{f'}$$

Soit

$$\overline{\mathrm{CO''}} = \frac{\overline{\mathrm{CO'}}f'}{\overline{\mathrm{CO'}} + f'}, = \frac{(\overline{\mathrm{CM}} + \overline{\mathrm{MO'}})f'}{(\overline{\mathrm{CM}} + \overline{\mathrm{MO'}}) + f'}$$

Avec $\overline{\mathrm{CO''}} = D + x$, on obtient :

$$D + x = \frac{\left(\mathrm{H}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - d\right)f'}{\mathrm{H}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \mathrm{d} + f'}$$

On a donc après simplification :

$$n = \frac{(f' - D - x)H}{(H - d)(f' - D - x) - (D + \mathrm{x})f'}$$

A.N. $n$ = 1,3.

# Association de lentilles et de miroirs

Un peu d'histoire

## La construction des premiers télescopes

Le télescope à réflexion a été inventé par l'anglais James Gregory en 1663 puis perfectionné par Isaac Newton quelques années plus tard.
Le télescope va progressivement remplacer la lunette astronomique car ses qualités sont nombreuses :
- les aberrations chromatiques sont supprimées puisque la lumière est réfléchie et non plus réfractée ;
- la forme parabolique du miroir primaire donne d'un objet ponctuel placé à l''infini une image rigoureusement stigmatique ;
- il est plus facile techniquement de fabriquer un grand miroir qu'une grande lentille convergente. Le diamètre d'ouverture de l'appareil est donc plus important ;
- enfin, la taille d'un télescope, pour des distances focales identiques à celles d'une lunette, est moindre. On obtient un instrument plus compact.

Le télescope a connu de multiples améliorations au cours du temps et le premier à avoir placé un miroir en verre argenté a été Léon Foucault (1819-1868). Ce savant du XIX^e siècle est connu pour avoir mis en place un pendule oscillant en février 1851 au Panthéon pour l'installer en mars de la même année à l'observatoire de Paris. Il est aussi celui qui sut argenter la face avant d'un miroir de verre utilisé dans les télescopes. Le dépôt d'argent permettait d'obtenir des miroirs d'argent réfléchissants de bonne qualité contrairement aux anciens miroirs en bronze poli qui étaient peu réfléchissants et que l'on employait alors. Le premier télescope de Léon Foucault équipé d'un miroir en verre date de 1859 et se trouve encore à l'observatoire de Paris. Aujourd'hui les télescopes réflecteurs ne sont plus argentés mais aluminés dans une chambre à vide.

Le plus grand télescope, constitué d'un miroir monobloc, est installé sur le site de la Silla au Chili, et le diamètre du miroir primaire est de 8 mètres. Il fait partie d'un ensemble de quatre télescopes du programme européen VLT (Very Large Telescope).

# Association de lentilles et de miroirs

## Exercice 1 Constructions géométriques et associations de lentilles

À l'aide d'une lentille mince convergente $L_1$ de centre $O_1$ et de distance focale $f'_1 = 4$ cm, on obtient une image $A_1B_1$ d'un objet réel AB de 1 cm de hauteur et placé à 6 cm de la lentille.

**1. Faire un schéma à l'échelle 1/2 sur l'axe optique et 3/2 dans la direction perpendiculaire et déterminer graphiquement la position et la taille de l'image $A_1B_1$.**

**2. Retrouver ces résultats par un calcul. Quel est le grandissement $\gamma_1$ ?**

**La lentille $L_1$ est remplacée par une lentille divergente $L_2$ de centre $O_2$ et de distance focale $f'_2 = -5$ cm.**

**3. Reprendre les deux premières questions avec cette nouvelle lentille.**

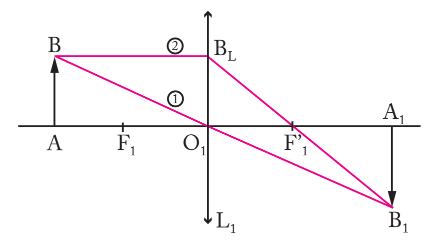
**On considère l'association des deux lentilles $L_1$ et $L_2$, $L_2$ étant placée à $d = 3$ cm derrière $L_1$. L'objet est toujours à 6 cm devant la lentille $L_1$.**

**4. Reprendre les deux premières questions pour l'association de ces deux lentilles. On tracera le chemin de deux rayons particuliers à travers le système.**

### Solution

**CONSEIL : un exercice sans aucune difficulté particulière.**

**1.** Représentons le rayon ① issu de B et passant par le centre optique de la lentille : ce rayon n'est pas dévié. Le rayon ② issu de B et parallèle à l'axe optique rencontre la lentille en $B_L$ ; Le rayon émergeant de la lentille est porté par la direction $B_LF'_1$ . On constate que le faisceau émergeant de la lentille est convergent : l'image est réelle.




On mesure graphiquement $\overline{O_1A_1} = 12$ cm et $\overline{A_1B_1} = -2$ cm.

**2.** L'objet est réel, on a donc $\overline{O_1A} = -6$ cm. Pour déterminer la position de l'image A' de A à travers la lentille, on utilise la loi de conjugaison des lentilles minces :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

On en déduit la position de $A_1$ :

$$\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A}\, f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1}$$

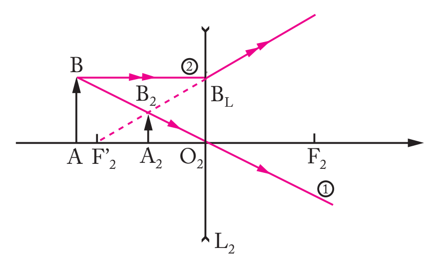
A.N. $\overline{O_1A_1} = 12$ cm.

Le grandissement $\gamma_1$ donne la taille de l'image $\overline{A_1B_1}$ en fonction de la taille de l'objet $\overline{AB}$ :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$$

$\overline{A_1B_1} = \gamma_1\overline{AB} = -2$ cm. L'image est réelle et inversée.

**3.** On utilise les mêmes rayons ① et ② que précédemment. La partie du rayon $F'_2B_L$ ne correspond pas à un chemin effectivement suivi par la lumière, on le représente donc en pointillé. Ici, le faisceau émergeant de la lentille est divergent : l'image est virtuelle.

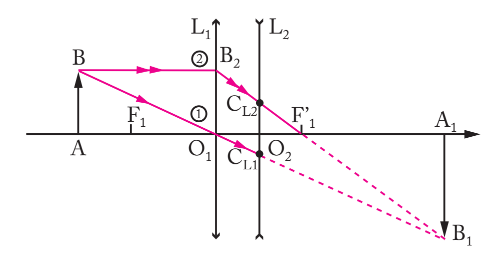



On obtient graphiquement $\overline{O_2A_2} \approx -2{,}6$ cm et $\overline{A_2B_2} \approx 0{,}47$ cm.

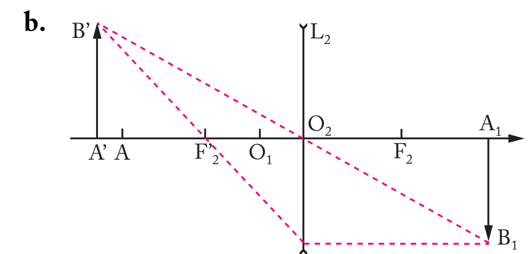
Le calcul conduit à $\overline{O_2A_2} \approx -2{,}7$ cm et $\gamma_2 = -0{,}45$ (soit $\overline{A_2B_2} \approx 0{,}45$ cm).

**4.** Nous décomposons la construction des trajets des rayons en trois étapes.

**a.**




**b.**




**c.**

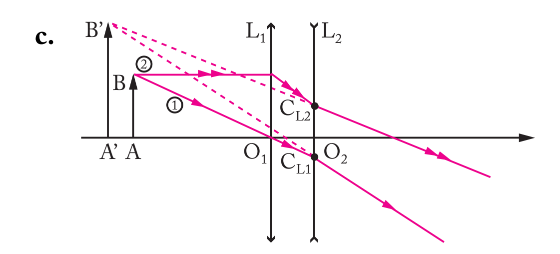


Figure a : On positionne l'image $B_1$ de B à travers la première lentille. Attention, cette image n'est pas observable car "elle n'existe pas". En effet, les rayons lumineux ① et ② rencontrent la lentille $L_2$ en $C_{L1}$ et $C_{L2}$ avant de converger en $B_1$: la partie des rayons ① et ② après $L_2$ ($C_{L1}B_1$ et $C_{L2}B_1$) est donc représentée en pointillée.

Figure b : $B_1$ est un objet (virtuel) pour la lentille $L_2$. Aucun rayon n'est effectivement émis par $B_1$: tous les rayons sont en pointillée. On peut cependant déterminer l'image de $B_1$ à travers $L_2$ en utilisant les propriétés usuelles (rayon issu de $B_1$ et passant par le centre optique $O_2$ et rayon issu de $B_1$ parallèle à l'axe optique) : on obtient ainsi B' qui est également l'image de B à travers l'association des deux lentilles $L_1$ et $L_2$.

Figure c : On peut maintenant compléter le trajet des rayons lumineux ① et ② « interrompus » en figure a aux points $C_{L1}$ et $C_{L2}$. On sait que le faisceau lumineux émergeant de $L_2$ est un cône de sommet B'. Ici, le cône est divergent car B' est une image virtuelle. On trace en pointillée le trajet $B'C_{L1}$ et $B'C_{L2}$. Les prolongements de $B'C_{L1}$ et $B'C_{L2}$ sont représentés en traits pleins : ils correspondent aux trajets effectivement suivis par les rayons ① et ②.

On obtient graphiquement : $\overline{O_2A'} \approx 11{,}5$ cm et $\overline{A'B'} \approx 2{,}5$ cm.

Pour retrouver ce résultat par le calcul, il suffit de déterminer l'image A'B' de $A_1B_1$ à travers $L_2$ (le calcul de la position et de la taille de $A_1B_1$ a été effectué en 2.). On a :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

On en déduit la position de A' :

$$\overline{O_2A'} = \frac{(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1})f'_2}{(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}) + f'_2}$$

Le grandissement total $\gamma$ est donné par :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{A_1B_1}}\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{OA}}$$

A.N. $\overline{O_2A'} = -11{,}25$ cm. $\gamma = 2{,}5$.

## Exercice 2 Association de deux lentilles

On observe un objet de 20 m de hauteur, perpendiculaire à l'axe optique d'un système constitué de deux lentilles : la première est une lentille convergente de distance focale $f'_1 = 20$ cm et la seconde une lentille divergente de distance focale $f'_2 = -5$ cm. Les deux lentilles sont séparées d'une distance $e = 10$ cm. L'objet observé est placé à $L = 2$ km devant la lentille convergente.

**1. Déterminer la position et la taille de l'image à travers la lentille convergente lorsqu'on enlève la lentille divergente.**

**2. Déterminer la position et la taille de l'image à travers le système des deux lentilles.**

## Solution

**CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté majeure. Pour déterminer l'image d'un objet à travers la succession de deux lentilles $L_1$ et $L_2$, le plus simple consiste à utiliser l'image intermédiaire de l'objet à travers $L_1$ ; cette image intermédiaire sert d'objet pour $L_2$ qui en forme une image correspondant à l'image de l'objet à travers $L_1 + L_2$.**

**1.** Notons $O_1$ le centre optique de la première lentille $L_1$ convergente. L'objet AB donne, à travers la lentille $L_1$, une image $A_1B_1$ qui vérifie :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

d'où

$$\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A}\,f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1}$$

Le grandissement correspondant est :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1}$$

Avec $\overline{O_1A} = -L$, on a finalement :

$$\overline{O_1A_1} = \frac{Lf'_1}{L - f'_1} \approx f'_1 \text{ (}A_1\text{ est au point focal image de }L_1\text{)}$$

$$\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{-L + f'_1} \approx \overline{AB}$$

A.N. $\overline{O_1A_1} = 20$ cm ; $\overline{A_1B_1} = 2$ mm.

**2.** Le schéma synoptique est le suivant :

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$$

On a déterminé les caractéristiques de $A_1B_1$ en 1. Il reste à caractériser A'B', image de AB à travers l'ensemble $L_1$–$L_2$ ou encore, image de $A_1B_1$ à travers $L_1$.

Déterminons la position de A'B' :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

Avec $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e + \frac{Lf'_1}{L - f'_1}$, il vient :

$$\overline{O_2A'} = \frac{[Lf'_1 - e(L - f'_1)]f'_2}{Lf'_1 + (f'_2 - e)(L - f'_1)} \approx \frac{(f'_1 - e)f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$$

A.N. $\overline{O_2A'} = -10$ cm.

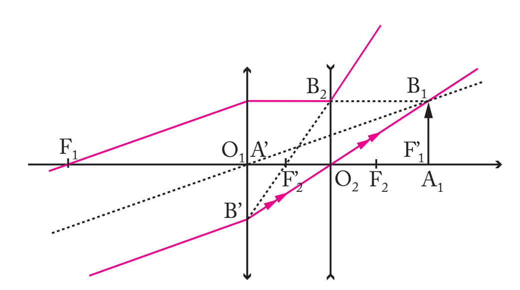
Le grandissement correspondant est :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{f'_2(L - f'_1)}{Lf'_1 + (f'_2 - e)(L - f'_1)}$$

Soit finalement :

$$\overline{\text{A'B'}} = -\frac{f'_2 f'_1}{Lf'_1 + (f'_2 - e)(L - f'_1)}\overline{\text{AB}} \approx -\frac{f'_1 f'_2}{L(f'_1 + f'_2 - e)}\overline{\text{AB}}$$

A.N. $\overline{\text{A'B'}} = -2$ cm.




## Exercice 3 Détermination des foyers d'un doublet de lentilles

Un doublet est formé de deux lentilles convergentes, la première $L_1$ de distance focale $f'_1 = 15$ cm et la seconde $L_2$ de distance focale $f'_2 = 10$ cm. Les centres optiques $O_1$ et $O_2$ des lentilles sont distants de $e = 5$ cm. On rappelle que le foyer objet est, par définition, un point de l'axe optique dont l'image à travers le système est renvoyée à l'infini. Le foyer image est, par définition, l'image d'un objet de l'axe optique à l'infini.

**Déterminer les positions des foyers objet et image de ce doublet.**

### Solution

**CONSEIL : comme dans l'exercice précédent, on s'intéresse ici à l'image définitive A' d'un objet A à travers une succession de deux lentilles $L_1$ et $L_2$. On utilisera l'image intermédiaire de A à travers $L_1$, dont l'image à travers $L_2$ forme l'image définitive A'. On se souviendra également que, par définition, le point focal objet F donne, à travers $L_1$ et $L_2$, une image à l'infini. De même, le point focal image F' est le point image, à travers $L_1$ et $L_2$, d'un objet situé à l'infini.**

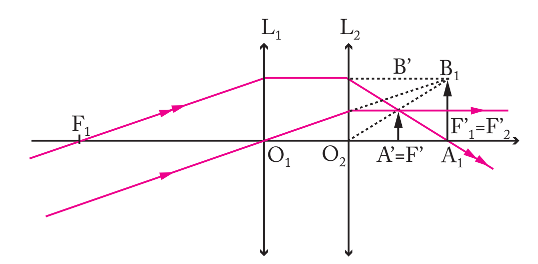
Pour déterminer le point focal image F' du doublet, on considère un faisceau incident constitué de rayons parallèles à l'axe optique. Le faisceau rencontre $L_1$ et converge au point focal image $F'_1$ de $L_1$. F' est donc l'image de $F'_1$ à travers la lentille $L_2$. On a :

$$\frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{F'}}} - \frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{F}'_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

On en déduit la position de F' :

$$\overline{\text{O}_2\text{F'}} = \frac{(\overline{\text{O}_2\text{O}_1} + \overline{\text{O}_1\text{F}'_1})f'_2}{(\overline{\text{O}_2\text{O}_1} + \overline{\text{O}_1\text{F}'_1}) + f'_2} = \frac{(-e + f'_1)f'_2}{-e + f'_1 + f'_2}$$

A.N. $\overline{\text{O}_2\text{F'}} = 5$ cm.




Sur la figure ci-dessus, on prend un faisceau quelconque issu d'un objet AB à l'infini, on note $A_1B_1$ l'image de AB à travers $L_1$ et A'B' l'image de $A_1B_1$ à travers $L_2$. On a alors A' = F'.

Pour déterminer le point focal objet F du doublet, considérons un faisceau émergeant de $L_2$ et constitué de rayons parallèles à l'axe optique. Ce faisceau provient du point focal objet $F_2$. F est donc l'objet donnant, à travers $L_1$, une image en $F_2$ suivant le schéma synoptique :

$$F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} \infty$$

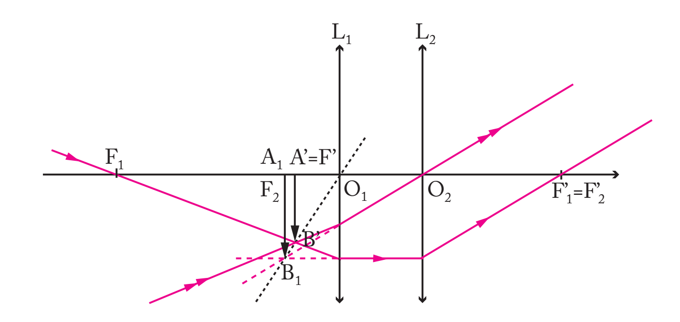
Écrivons la relation de Descartes pour (F, $F_2$) conjugués à travers $L_1$ :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f'_1}$$

On en déduit la position de F :

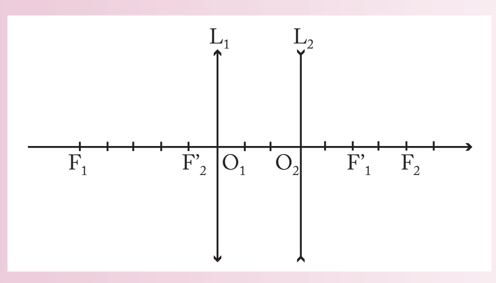
$$\overline{O_1F} = \frac{(\overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2})f'_1}{-(\overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}) + f'_1} = \frac{(e - f'_2)f'_1}{-e + f'_1 + f'_2}$$

A.N. $\overline{O_1F} = -3,75$ cm.



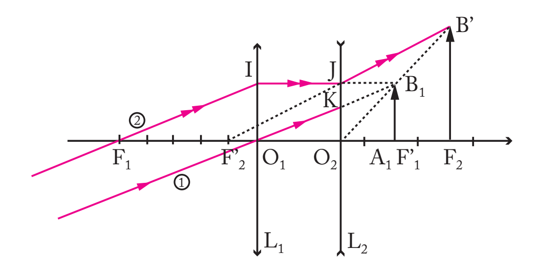
## Exercice 4 Foyer image d'un doublet

**Construire le foyer image F' du doublet schématisé ci-dessous. On tracera le chemin parcouru par deux rayons particuliers.**




### Solution

**CONSEIL : cet exercice est, dans l'esprit, identique au précédent.**




Le point focal image est, par définition, l'image d'un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique. Un faisceau de rayons parallèles entre eux et non parallèles à l'axe optique converge en un point du plan focal image. La figure ci-dessus montre la construction du plan focal image.

On construit l'image $A_1B_1$ du faisceau à travers la lentille $L_1$ convergente : pour cela, on utilise deux rayons ① et ② particuliers :

- le rayon ① passe par le centre optique $O_1$ de la lentille : il n'est pas dévié ;
- le rayon ② passe par le point focal objet $F_1$ de la lentille : il émerge parallèlement à l'axe optique.

L'intersection des deux rayons émergents, qui correspond à $B_1$, se situe derrière la lentille $L_2$ ; il faut représenter en pointillé la partie des rayons derrière $L_2$ ($JB_1$ et $KB_1$) car ils correspondent à des chemins qui ne sont pas effectivement suivis par la lumière.

$A_1B_1$ sert d'objet pour la lentille $L_2$ divergente. On trace en pointillé deux rayons convergeant sur l'image B' de $B_1$ à travers $L_2$ en utilisant deux rayons particuliers issus de $B_1$ :

- le rayon $B_1JB'$ part de $B_1$ parallèlement à l'axe optique. Le rayon émergeant de $L_2$ est porté par la direction $JF'_2$, par définition du point focal image ($F'_2$) ;
- le rayon $B_1B'$ est porté par la direction $O_2B_1$ et n'est donc pas dévié.

B' étant défini, on peut terminer la marche des rayons ① et ② : on trace en traits pleins les rayons émergeant de la lentille $L_2$ et portés respectivement par les directions JB' et KB'.

Le point B' appartient, par définition au plan focal image du doublet ; le point F' est le point intersection du plan focal image et de l'axe optique.
On voit sur la construction de la figure ci-dessus que ce point coïncide avec le point focal objet de la lentille $L_2$.

## Exercice 5 Étude d'un système afocal à trois lentilles

Un système optique centré, d'axe optique Δ, est constitué de trois lentilles minces $L_1$, $L_2$ et $L_3$ de distances focales respectives $f'_1$, $f'_2$ et $f'_3$ et de centres optiques $O_1$, $O_2$ et $O_3$. On pose $d_1 = O_1O_2$ et $d_2 = O_2O_3$.

**1.a. Donner la définition d'un système afocal.**

**b. Établir la relation liant $f'_1, f'_2, f'_3$, $d_1$ et $d_2$ pour que l'association des trois lentilles soit afocale.**

**c. Calculer $f'_2$ pour $f'_3 = f'_1 = 0{,}5$ m, $d_1 = 1$ m et $d_2 = 0{,}25$ m.**

**2. Avec les données de la question 1), effectuer une construction géométrique et déterminer le grandissement transversal $\gamma$ du système et le grandissement angulaire $G$.**

**3. Déterminer la position de l'image par le système afocal du point focal objet $F_1$ de la première lentille. On notera ce point $\phi'$.**

### Solution

**CONSEIL : comparé aux deux exercices précédents, cet exercice comporte deux difficultés supplémentaires. Tout d'abord, on considère l'association de 3 lentilles $L_1$, $L_2$ et $L_3$ (et non plus 2). La seconde difficulté vient du fait que le système est afocal. Il faut traduire cette propriété de la façon suivante : si l'objet A est à l'infini, son image à travers la succession des 3 lentilles est également à l'infini. Ceci traduit le fait que les points focaux objet et image sont tous les deux renvoyés à l'infini.**

**1. a.** L'objet de cet exercice est l'étude d'un système afocal constitué de l'association de trois lentilles. Un système afocal est un système dont les foyers objet et image sont renvoyés à l'infini. À travers un système afocal, un objet à l'infini forme son image à l'infini. Dans le cas de l'association de trois lentilles, le schéma synoptique s'écrit :

$$\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F_3 \xrightarrow{L_3} \infty$$

Par définition, l'objet à l'infini forme son image à travers $L_1$ au point focal image $F'_1$ de $L_1$. L'image finale est à l'infini. Cette image a pour objet à travers $L_3$ le point focal objet $F_3$ de $L_3$. On en déduit la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit afocal : l'image du point focal image $F'_1$ de la première lentille à travers la lentille $L_2$ coïncide avec le point focal objet $F_3$ de la troisième lentille.

**b.** Traduisons cette condition en utilisant la loi de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_2F'_1}\cdot\overline{F'_2F_3} = -f'^2_2$$

avec $\overline{F_2F'_1} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = f'_2 - d_1 + f'_1$

et $\overline{F'_2F_3} = \overline{F'_2O_2} + \overline{O_2O_3} + \overline{O_3F_3} = -f'_2 + d_2 - f'_3$

La condition s'écrit donc :

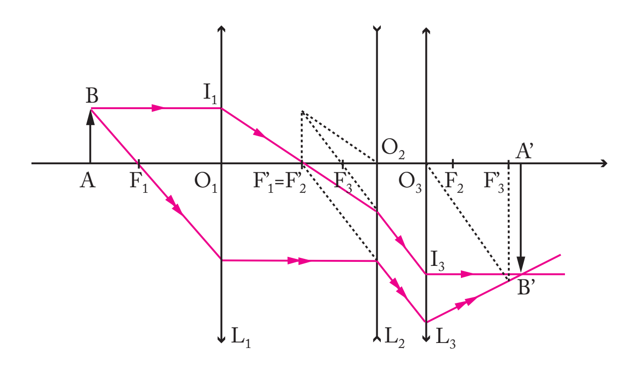
$$(f'_2 - d_1 + f'_1)(-f'_2 + d_2 - f'_3) = -f'^2_2$$

**c.** La distance focale $f'_2$ s'écrit :

$$f'_2 = -\frac{(d_1 - f'_1)(d_2 - f'_3)}{f'_1 + f'_3 - d_1 - d_2}$$

A.N. $f'_2 = -0{,}5$ m. La lentille $L_2$ est donc divergente.

**2.**




Un rayon incident parallèle à l'axe optique émerge parallèle à l'axe optique. On a donc :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_3I_3}}{\overline{O_1I_1}} = \frac{h_3}{h_1}$$

or :

$$\frac{h_3}{h_1} = \frac{\overline{O_3F_3}}{\overline{O_2F_3}} = \frac{-f'_3}{d_2 - f'_3} \quad \text{et} \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{\overline{O_2F'_1}}{\overline{O_1F'_1}} = \frac{-d_1 + f'_1}{f'_1}$$

soit :

$$\gamma = \frac{(d_1 - f'_1)f'_3}{(d_2 - f'_3)f'_1}$$

A.N. $\gamma = -2$.

Avec $G = G_1\, G_2\, G_3$ et $\gamma = \gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3$, il vient $\gamma G = \prod_i \gamma_i G_i$. On a pour chaque lentille $\gamma_i G_i = 1$, on obtient donc :

$$G = \frac{(d_2 - f'_3)f'_1}{(d_1 - f'_1)f'_3}$$

A.N. $G = -0{,}5$.

**3.** On cherche l'image à travers le système du point focal objet $F_1$ de la première lentille. Le schéma synoptique s'écrit :

$$F_1 \xrightarrow{L_1} \infty \xrightarrow{L_2} F'_2 \xrightarrow{L_3} \phi'$$

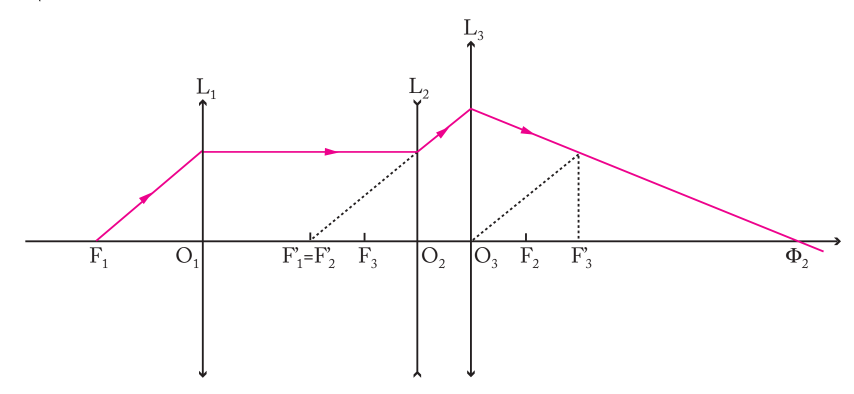
Le point $\phi'$ est l'image de $F'_2$ à travers $L_3$. Appliquons la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_3F'_2}\cdot\overline{F'_3\phi'} = -f'^2_3$$

Avec $\overline{F_3F'_2} = \overline{F_3O_3} + \overline{O_3O_2} + \overline{O_2F_2'} = f'_3 - d_2 + f'_2$, il vient :

$$\overline{F'_3\phi'} = \frac{f'^2_3}{f'_3 + f'_2 - d_2}$$

A.N. $\overline{F'_3\phi'} = 1$ m.




## Exercice 6 Puissance d'un système lentille/miroir

On considère un système lentille/miroir plan, placé de façon à ce que la distance du miroir au point focal image de la lentille soit égale à $b$. La distance focale de la lentille convergente est notée $f'$. Un observateur place son œil en C à la distance $a$ du point focal objet de la lentille.

**1. Établir une relation entre *a*, *b* et *f'* pour que l'observateur en C voit l'image de son œil à l'infini ?**

**2. Calculer la puissance de l'ensemble (miroir + lentille) en fonction de *a*.**

### Solution

**CONSEIL : l'œil de l'observateur est un objet pour ce système dont on cherche à déterminer, dans la première question, l'image C'. On utilisera pour cela les images intermédiaires à travers la lentille et le miroir (les rayons lumineux issus de C rencontrent deux fois la lentille, à l'aller avant de rencontrer le miroir et au retour après réflexion sur le miroir). Le calcul de la puissance ne pose pas de difficulté une fois que les caractéristiques de l'image C' de C sont définies.**

**1.** L'objectif de cet exercice est de déterminer la puissance d'un système constitué de l'association d'une lentille et d'un miroir plan. Notons $C_1$ et $C_2$ les images intermédiaires de l'œil C de l'observateur et C' l'image finale à travers le système lentille + miroir plan ; le schéma synoptique s'écrit :

$$C \xrightarrow{\text{lentille}} C_1 \xrightarrow{\text{miroir}} C_2 \xrightarrow{\text{lentille}} C'$$

Pour que l'image définitive C' soit renvoyée à l'infini, il faut que $C_2$ coïncide avec le point focal image F' de la lentille ; en effet, le sens de propagation de la lumière est inversé après réflexion sur le miroir et le point focal image devient, pour ce sens de propagation, le point focal objet donc $C_2 = F'$.

$C_2$ est l'image de $C_1$ à travers le miroir, soit :

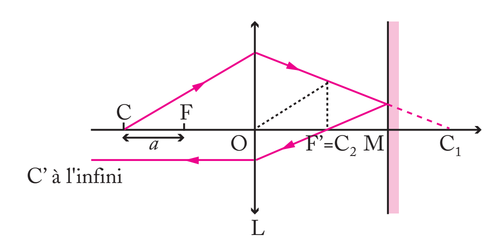
$$\overline{MC_1} = \overline{C_2M} = \overline{F'M} = b$$

Enfin $C_1$ est l'image de C à travers la lentille. La loi de conjugaison de Newton entre C et $C_1$ s'écrit :

$$\overline{F'C_1} \cdot \overline{FC} = -f'^2$$

En outre, $\overline{F'C_1} = \overline{F'M} + \overline{MC_1} = 2b$ et $\overline{FC} = -a$ donc :

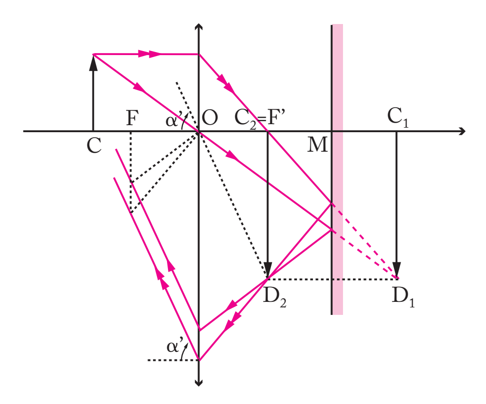
$$2ab = f'^2$$




**2.** La puissance du système est définie par :

$$P = \frac{\alpha'}{CD}$$

où CD est la taille de l'objet (ici, l'œil de l'observateur) et α' l'angle sous lequel est vu l'image de CD à travers le système.




L'angle α' s'exprime, dans l'approximation des faibles angles, dans le triangle $OC_2D_2$ :

$$\alpha' = \frac{C_2D_2}{f'} = \frac{C_1D_1}{f'} = \frac{\gamma CD}{f'}$$

($C_1D_1 = C_2D_2$ car le grandissement d'un miroir plan est 1) avec :

$$\gamma = \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC_2} + \overline{C_2M} + \overline{MC_1}}{\overline{OF} + \overline{FC}} = -\frac{f' + 2b}{f' + a}$$

On obtient finalement, en prenant la valeur absolue de γ car la puissance est une quantité positive :

$$P = \frac{\alpha'}{CD} = \frac{f' + 2b}{f'(f' + a)}$$

La condition établie en 1. permet d'exprimer $b$ en fonction de $a$ et $f'$ : $2b = f'^2/a$, soit finalement :

$$P = \frac{1}{a}.$$

# FOCOMÉTRIE

## Exercice 7 La méthode de l'objet éloigné

La méthode dite de « l'objet éloigné » est une manière simple et rapide de déterminer approximativement la distance focale d'une lentille mince convergente. On note A'B' l'image à travers la lentille d'un objet AB placé « loin » de l'écran.

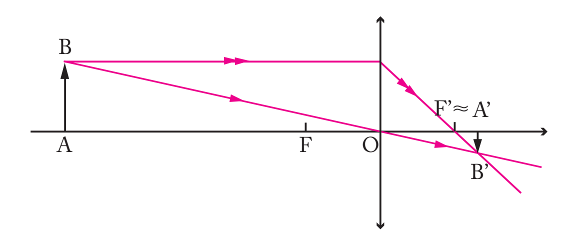
**1. Où faut-il placer un écran d'observation pour recueillir l'image A'B' ?**

**2. En déduire la distance focale de la lentille et préciser le terme « loin » pour la position de l'objet.**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice ne présente pas de difficulté particulière ; la méthode proposée consiste à déterminer expérimentalement la distance focale d'une lentille convergente. Il faut simplement traduire dans l'énoncé la notion d'objet placé « loin » qui revient, dans les équations, à considérer l'objet à l'infini.**

**1.** Si l'objet est loin de la lentille, à la limite à l'infini, on peut considérer que l'image réelle se forme dans le plan focal image.




**2.** La mesure de la distance du centre optique à l'écran donne une mesure approximative directe de la distance focale de la lentille. Le terme « loin » signifie simplement que la distance de l'objet à l'écran est très grande devant $f'$ ; c'est ce qu'on désigne usuellement par l'infini. Cette méthode n'est évidemment pas très précise. En effet, même si l'objet est très éloigné, on néglige sa contribution dans la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} \approx \frac{1}{\overline{OA'}}$$

## Exercice 8 La méthode de Bessel

Avec une lentille mince convergente L, située entre un objet réel AB et un écran placé à une distance $D$ de l'objet, on forme sur l'écran l'image A'B' de l'objet AB.

**1. Déterminer la relation qui lie $D$ à la distance $x = \overline{AO}$.**

**2. Étudier cette relation sur un domaine de $x$ compris entre 0 et + ∞. Tracer le graphe de $D(x)$ et l'interpréter physiquement.**

**3. Montrer graphiquement que, pour une position donnée de l'objet et de l'écran, il existe deux positions de la lentille, distantes de $d$, qui permettent d'obtenir une image nette sur l'écran.**

**4. Exprimer la distance focale image $f'$ de la lentille en fonction de $D$ et de $d$.**

**5. Calculer $f'$ pour les valeurs $D$ = 100 cm et $d$ = 50 cm.**

### Solution

**CONSEIL :** un nouvel exercice, qui présente une méthode de focométrie, sans difficulté particulière. Laissez-vous guider par les questions.

**1.** La distance qui sépare l'objet de l'image $D = \overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'}$.

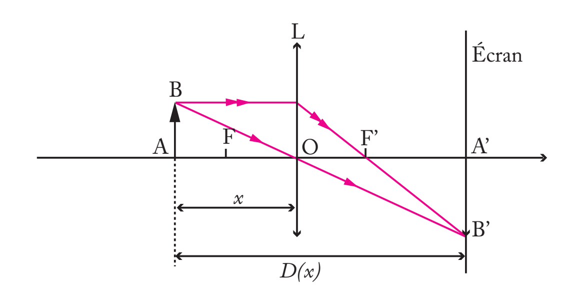
En utilisant la relation de conjugaison $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ avec $x = -\overline{OA}$, on obtient :

$$OA' = -\frac{xf'}{f' - x}$$

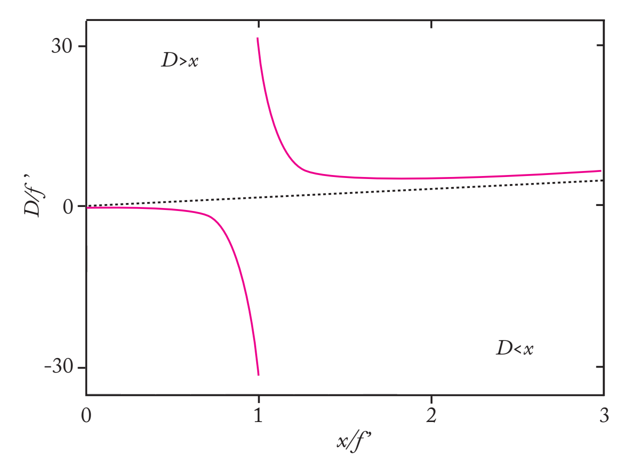
$$D = x + \frac{f'x}{x - f'},$$

Soit finalement

$$D(x) = \frac{x^2}{x - f'}$$



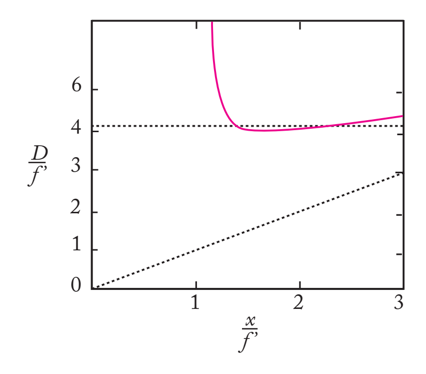

**2.** On a $D(x) = \frac{x^2}{x - f'}$. Lorsque $x$ varie entre 0 et l'infini, on obtient les variations de $D(x)$ représentées sur la figure suivante.




Pour $0 < x < f'$, $D(x)$ est négatif, c'est-à-dire que l'image se forme d'une part devant la lentille (elle est donc virtuelle) mais également devant l'objet AB, elle est donc agrandie puisque le rayon BO passe également par B'. L'image est réelle si elle se forme derrière la lentille, c'est-à-dire si $D(x) > x$. Ceci est obtenu pour $x > f'$ (figure ci-dessus).

**3.** Pour une position relative donnée de l'objet et de l'écran (c'est-à-dire pour une valeur de $D$), on peut obtenir deux positions de la lentille (c'est-à-dire notamment, deux valeurs de x).

La figure ci-dessous représente un agrandissement de la courbe $D(x)$ pour une image réelle $D > x$ : il apparaît que pour $D > 4f'$, la droite $D(x)$ = cte correspond bien à deux valeurs distinctes de $x$. Pour ces deux positions de la lentille par rapport à l'objet, l'image se forme à la même distance de l'objet. Si on note $x_1$ et $x_2$ ces deux valeurs de x conduisant à la même valeur de $D$, on a $d = x_2 - x_1$.




**4.** Reprenons l'équation $D(x) = \dfrac{x^2}{x - f'}$. Trouver $x$ pour une valeur de $D$ donnée revient à résoudre le polynôme du second degré en $x$ :

$$x^2 - Dx + Df' = 0$$

Les solutions de ce polynôme s'écrivent :

$$x_1 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}$$

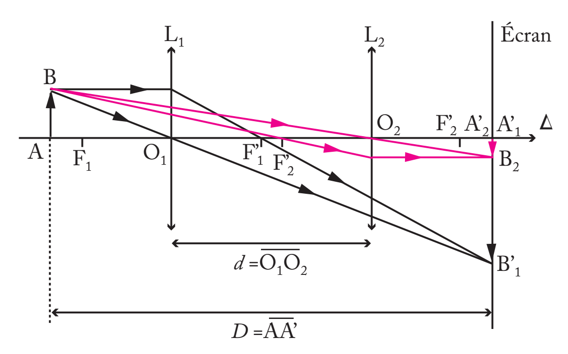
On retrouve bien sûr la condition obtenue graphiquement à la question précédente, à savoir que ces deux racines n'existent que si $D > 4f'$(condition pour que le discriminant du polynôme soit réel). On obtient pour $d$ :

$$d = x_2 - x_1 = \sqrt{D^2 - 4Df'}$$

L'expression de $f'$en fonction de $d$ et $D$ est :

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

**5.**




L'application numérique donne $f'$= 18,75 cm.

## Exercice 9 Méthode de Silbermann

Pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente, on peut utiliser la méthode suivante, appelée méthode de Silbermann. On place sur un banc optique une source objet, un écran et la lentille dont on cherche à déterminer la distance focale ; on note O le centre optique de la lentille, F et F' ses points focaux respectivement objet et image. On place la lentille entre la source objet et l'écran de façon à obtenir un grandissement linéaire égal à – 1 : l'image de la source est de même taille et inversée. L'objet de cet exercice est de montrer que la distance entre la source et l'écran permet de mesurer la distance focale de la lentille.

**1. Déterminer la relation entre les positions des deux points conjugués A et A', dits antiprincipaux, donnant un grandissement de –1.**

**2. Comment déduit-on la distance focale de la lentille ?**

### Solution

**1.** Notons A'B' l'image de l'objet AB à travers la lentille ; on a alors la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

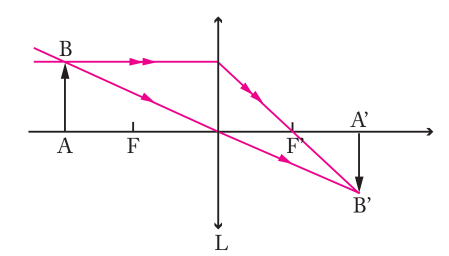
Le grandissement est égal à −1, on a donc par ailleurs :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1$$

On en déduit les positions de l'objet et de l'écran :

$$\overline{OA'} = -\overline{OA} = 2f'$$

**2.** Dans la méthode de Silbermann, le réglage donnant un grandissement de −1 est réalisé lorsque la distance de l'objet à l'écran est égale à $\overline{AA'} = 4f'$. La mesure de cette distance permet de déterminer la distance focale de la lentille.




## Exercice 10 Méthode d'autocollimation

On place un miroir plan M contre une lentille mince convergente L de centre optique O. Un point objet A de l'axe optique a pour image définitive à travers le système lentille-miroir un point A' sur l'axe. On note $x$ la mesure algébrique $\overline{OA}$ et $y$ la mesure algébrique $\overline{AA'}$.

**1. Déterminer $y$ en fonction de $x$ et de $f'$.**

**2. Étudier et tracer l'allure de $Y = y/f'$ en fonction de $X = x/f'$.**

**3. Pour quelles valeurs de $x$ l'image A' est-elle réelle ?**

**4. Pour quelles positions de $x$ la mesure de $f'$ est-elle la plus simple ? Que vaut alors le grandissement ?**

### Solution

**CONSEIL : le système utilisé dans la méthode d'autocollimation est constitué de l'association d'une lentille (dont on cherche à déterminer la distance focale) et d'un miroir. Il faut donc traduire le fait que les rayons issus de A traversent la lentille, se réfléchissent sur le miroir et retraversent la lentille pour former finalement l'image A' de A ; on doit donc appliquer la relation de conjugaison de la lentille (1ère image intermédiaire), du miroir (seconde image intermédiaire) et à nouveau de la lentille (image définitive).**

**1.** Le schéma synoptique du système optique s'écrit :

$$A \xrightarrow{\text{Lentille L}} A_1 \xrightarrow{\text{Miroir}} A_2 \xrightarrow{\text{Lentille L}} A'$$

Déterminons les positions des images successives $A_1$, $A_2$ et A'. $A_1$ est l'image de A à travers la lentille de centre O :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

d'où

$$\overline{OA_1} = \frac{\overline{OA}f'}{\overline{OA} + f'} = \frac{xf'}{x + f'}$$

$A_2$ est l'image de $A_1$ par le miroir. On a donc :

$$\overline{OA_2} = -\overline{OA_1} = -\frac{xf'}{x + f'}$$

$A_2$ est derrière la lentille, le principe de retour inverse de la lumière donne :

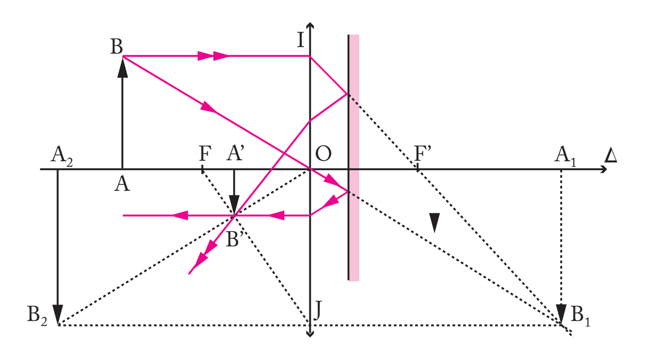
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{1}{f'}$$

d'où

$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA_2}f'}{f' - \overline{OA_2}} = -\frac{xf'}{2x + f'}$$

On a finalement

$$y = \overline{AA'} = -\frac{2x(f' + x)}{2x + f'}$$




Sur le schéma ci-dessus, le miroir est artificiellement décalé de la lentille afin de mieux comprendre le cheminement des rayons lumineux mais on a utilisé le point O pour construire l'image $A_2B_2$ de $A_1B_1$ par le miroir.

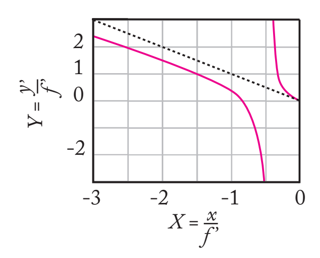
**2.** Posons $y = f'Y$ et $x = f'X$, on obtient $Y = f(X)$ avec :

$$f(X) = -\frac{2X(1 + X)}{2X + 1}$$

pour $X$ variant dans $]-\infty\ ;\ 0]$ (car A est un objet réel pour le système).

On calcule alors $f'(X) = 2\dfrac{-2X^2 - 2X - 1}{(2X + 1)}$. Le sens de variation de $f$ est donné par le signe

de $f'$, c'est-à-dire le signe du polynôme du second ordre : $P(X) = -2X^2 - 2X - 1$.
Le discriminant de $P(X)$ est égal à $D = -4$ ; $P(X)$ garde donc un signe constant et négatif (par exemple, $P(0) = -1$). La fonction $f(X)$ est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$. $f(X)$ a les caractéristiques suivantes :
- elle s'annule en $X = 0$ et $X = -1$ ;
- elle tend vers $-\infty$ pour $X = -1/2^-$ et vers $+\infty$ en $X = -1/2^+$ ;
- elle se comporte comme $-X$ quand $X$ tend vers $-\infty$.
La figure ci-dessous représente l'allure de $Y = f(X)$.



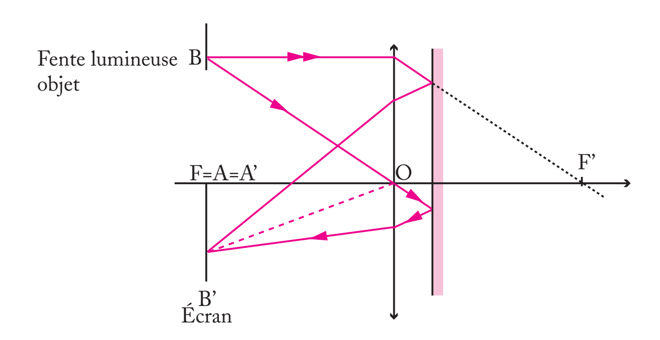

Sur ce graphe, on a tracé la droite $Y = -X$, qui délimite les régions de $x$ correspondant à la formation d'une image réelle ou virtuelle.

**3.** L'image est réelle si $\overline{OA'} \leq 0$ c'est-à-dire si $\overline{AA'} \leq -\overline{OA'}$.

Dans la zone correspondant à $X \in\ ]-\infty\ ;\ -1/2[$, $f(X) \leq -X$, la condition $\overline{AA'} \leq -\overline{OA'}$ est vérifiée. Elle correspond à un objet A placé entre $-\infty$ et le milieu de OF.

Dans la zone correspondant à $X \in\ ]-1/2\ ;\ 0]$, $f(X) \geq -X$, la condition $\overline{AA'} \leq -\overline{OA'}$ n'est pas vérifiée : l'image A' est virtuelle.

**4.** Une position particulière de $X$ est $X = -1$ pour laquelle $Y = 0$. Autrement dit, lorsque l'objet est dans le plan focal objet de la lentille, son image à travers le système lentille/miroir se forme également dans le plan focal objet (figure ci-dessous).
Dans la méthode d'autocollimation, on déplace une source lumineuse objet formée d'un écran percé d'une fente éclairée et on cherche la position de cet objet telle que son image se forme sur l'écran. La distance de l'écran à la lentille correspond à la distance focale de la lentille.



## Exercice 11 Une autre approche de l'autocollimation

On accole une lentille convergente L à un miroir plan M. On note O le centre optique de la lentille.

**1.a. En combien d'étapes ce système catadioptrique donne de l'objet A une image A' ?**

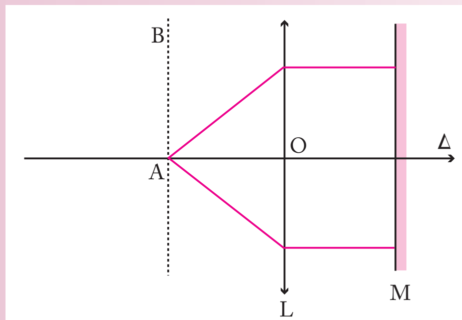
**b. Construire géométriquement A'B' en plaçant l'objet AB à une distance de O supérieure à *f'* et en déterminant les positions des images successives de A jusqu'à A'.**

**2. Exprimer la distance AA' en fonction de *f'* et de OA.**

Lorsque l'objet est dans le plan focal objet de la lentille, on obtient une image A'B' inversée qui se forme dans le plan focal objet de la lentille.

**3. Sachant que la distance OA vaut 20 cm, quelle est la valeur de la vergence de la lentille ?**

**4. On incline légèrement le miroir plan. Compléter le schéma de la figure ci-dessous. Quel est l'intérêt d'incliner légèrement le miroir plan ?**




**5. De toutes les méthodes étudiées pour obtenir une vergence de lentille, laquelle sera la plus fiable ?**

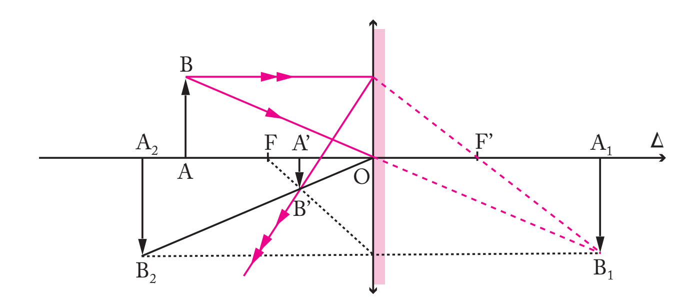
### Solution

**CONSEIL : cet exercice présente une méthode d'autocollimation qui utilise le même système que dans l'exercice précédent. Il est préférable de traiter les deux exercices dans l'ordre.**

**1.a.** On obtient A' en 3 étapes :




**b.**




**2.** La relation de conjugaison des lentilles pour les points conjugués $(A, A_1)$ à travers L s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

L'image $A_2$ de $A_1$ à travers M est telle que : $\overline{OA_1} = -\overline{OA_2}$, soit :

$$\overline{OA_2} = -\overline{OA_1} = -\frac{f'\overline{OA}}{\overline{OA}+f'}$$

Dans le sens inverse (–L) la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{1}{f'}$$

On a donc

$$\overline{OA'} = -\frac{f'\overline{OA}}{(2\overline{OA}+f')}$$

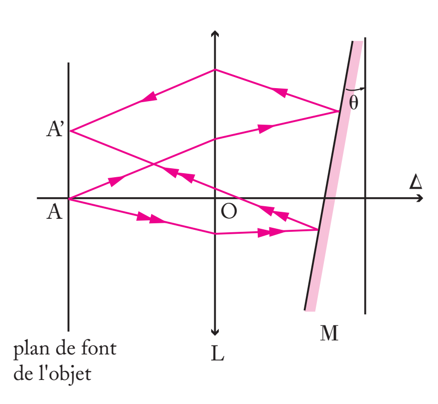
$$\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = -\frac{f'\overline{OA}}{(2\overline{OA}+f')} - \overline{OA}$$

Soit finalement

$$\overline{AA'} = -\frac{2\overline{OA}(\overline{OA}+f')}{(2\overline{OA}+f')}$$

**3.** Avec $\overline{OA} = f' = 20$ cm, on obtient la vergence de la lentille est $V = \frac{1}{f'} = 5\ \delta$.

**4.** Les rayons sortant de la lentille sont parallèles à Δ. Les rayons réfléchis sont donc parallèles entre eux et vont converger dans le plan de front de l'objet AB après avoir retraversé L. On obtient une image nette décalée et non superposée sur l'objet AB d'où l'intérêt d'incliner légèrement le miroir.




**5.** La méthode la plus fiable est la méthode d'autocollimation très facile à mettre en œuvre et sans aucun calcul : elle donne la valeur d'une distance focale quand le réglage est convenablement réalisé.

## Exercice 12 Miroir et lentille distants de *D*

On place un miroir plan à une distance *D* derrière une lentille convergente ; le miroir se trouve positionné perpendiculairement à l'axe optique de la lentille.

**1. Construire l'image à travers le système lentille/miroir d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique de la lentille, l'objet étant situé entre l'infini et le plan focal objet de la lentille.**

**2. Déterminer la position de l'image A' de A et le grandissement du système.**

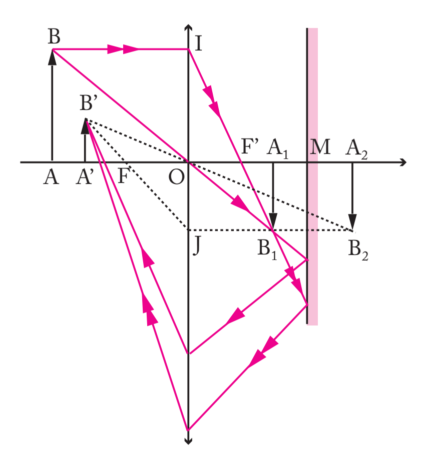
**3.a. Dans quelle condition l'image donnée par le système peut-elle être recueillie dans le même plan que l'objet AB ?**

**b. Déterminer dans ce cas la taille de l'image.**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice reprend le système constitué de l'association d'une lentille et d'un miroir mais ici, le miroir n'est pas collé à la lentille. Le schéma synoptique reste le même (les rayons lumineux traversent le système lentille – miroir – lentille).**

**1.** On considère un objet AB avant le plan focal objet de la lentille. Son image $A_1B_1$ à travers la lentille construite à partir des rayons $BIB_1$ et $BOB_1$, est réelle et inversée. Cette image devient un objet pour le miroir : son image, notée $A_2B_2$, est symétrique par rapport au miroir. Il ne reste plus qu'à construire l'image A'B' de $A_2B_2$ à partir des rayons $B_2JB'$ et $B_2OB'$. Pour cette dernière construction, il faut faire attention au principe de retour inverse de la lumière : c'est le point F qui sert de point focal image pour l'objet $A_2B_2$.




**2.** Le schéma synoptique du système s'écrit :

$$A \xrightarrow{\text{Lentille L}} A_1 \xrightarrow{\text{Miroir}} A_2 \xrightarrow{\text{Lentille L}} A'$$

Déterminons les positions des images successives $A_1$, $A_2$ et A' ainsi que leur taille. $A_1$ est l'image de A à travers la lentille de centre O :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

d'où

$$\overline{OA_1} = \frac{\overline{OA}f'}{\overline{OA}+f'}$$

Le grandissement correspondant est :

$$\gamma = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \frac{f'}{\overline{OA}+f'}$$

$A_2$ est l'image de $A_1$ à travers le miroir ; on a donc :

$$\overline{MA_2} = -\overline{MA_1} = D - \overline{OA_1}$$

Le grandissement correspondant est :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = 1$$

A' est l'image de $A_2$ à travers la lentille, le principe de retour inverse de la lumière donne :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{1}{f'}$$

$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA_2}f'}{f' - \overline{OA_2}}$$

et un grandissement

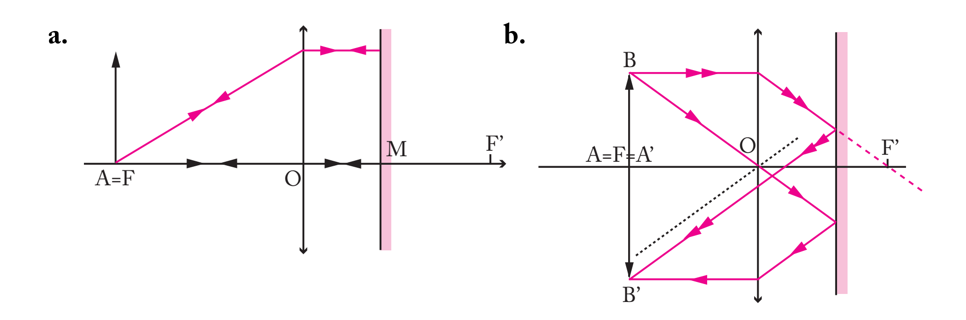
$$\gamma_3 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_2}} = \frac{f'}{f' - \overline{OA_2}}$$

Avec $\overline{OA_2} = D + \overline{MA_2}$, on a finalement :

$$\overline{OA'} = \frac{[2D(\overline{OA}+f') - \overline{OA}f']f'}{(f'+\overline{OA})(f'-2D) + \overline{OA}f'}$$

$$\gamma_3 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f'^2}{(f'+\overline{OA})((f'-2D) + f'\overline{OA})}$$

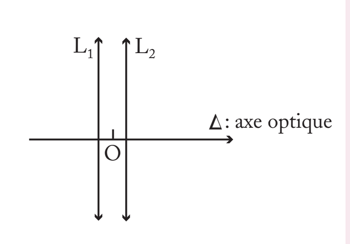
**3.a.** Lorsque l'objet est dans le plan focal objet de la lentille, le faisceau issu de A (figure a.) émerge de la lentille parallèlement à l'axe optique. La réflexion du faisceau sur le miroir les transforme en un faisceau toujours parallèle à l'axe optique mais se propageant dans le sens opposé. Ce faisceau rencontre à nouveau la lentille et converge, par définition, au point focal image (qui correspond au point focal objet pour la propagation dans l'autre sens). La figure b. montre la construction de l'image B' de B.



**b.** En reprenant les expressions établies en 2., on trouve un grandissement de −1, soit une image de même taille et inversée.

## Exercice 13 Détermination de la vergence d'une lentille divergente

Dans un premier temps, on accole deux lentilles minces convergentes $L_1$ et $L_2$.




**1. Donner le schéma synoptique qui permet de déterminer l'image A' de l'objet A à travers le système formé des deux lentilles.**

**2. Appliquer la formule de conjugaison à chaque lentille et trouver la focale de la lentille équivalente à $L_1$ et $L_2$.**

**3. En déduire l'expression de la vergence du système étudié.**

**4. Application numérique : $V_1$ = + 5 δ et $V_2$ = +10 δ.**

**5. Reprendre les questions 1) à 3) pour une lentille mince convergente de distance focale $f'_1$ = 10 cm associée à une lentille divergente de distance focale $f'$ = -20 cm. Quel est l'intérêt de ce type d'association ?**

### Solution

**CONSEIL : le système étudié est constitué de l'association de deux lentilles accolées, celle divergente dont on cherche à déterminer la vergence et celle, convergente, dont la vergence est connue. L'exercice ne présente pas de difficulté particulière, l'objectif étant de montrer que l'association de deux lentilles, l'une convergente et l'autre divergente, peut être équivalente à une lentille convergente unique. Cette lentille peut être alors étudiée avec des méthodes classiques de focométrie, adaptées aux lentilles convergentes.**

**1.** Le schéma synoptique s'écrit :

$$A \xrightarrow{\text{lentille } L_1} A_1 \xrightarrow{\text{lentille } L_2} A'$$

**2.** Appliquons deux fois la relation de conjugaison aux points ($A$, $A_1$) conjugués pour $L_1$ et ($A_1$, A') conjugués pour $L_2$, les deux lentilles accolées ayant même centre optique O :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

Si on ajoute les deux égalités, on obtient :

$$-\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OA'}}=\frac{1}{f'_1}+\frac{1}{f'_2}$$

Posons $\frac{1}{f'}=\frac{1}{f'_1}+\frac{1}{f'_2}$. L'égalité précédente permet de montrer que la juxtaposition de deux lentilles minces convergentes équivaut à une lentille mince unique dont la distance focale $f'$ vérifie $\frac{1}{f'}=\frac{1}{f'_1}+\frac{1}{f'_2}$.

**3.** L'égalité précédente montre que la vergence du système est $V = V_1 + V_2$, c'est-à-dire la somme des vergences de chaque lentille.

**4.** L'application numérique donne $V = +15\ \delta$. La lentille équivalente de 15 dioptries reste convergente.

**5.** Le calcul des questions 1 à 3 reste valable quelle que soit la nature des lentilles accolées. Avec $V_1=\frac{1}{f'_1}=10\ \delta$ et $V_2=\frac{1}{f'_2}=-5\ \delta$, la vergence du système $V = V_1 + V_2$ est égale à $V = +5\ \delta$. On obtient une vergence positive de 5 dioptries.
En accolant des lentilles de nature différente, il est possible de déterminer la vergence d'une lentille mince divergente. En effet, si la lentille résultante est convergente, on peut utiliser une méthode de focométrie telle que la méthode d'autocollimation ou bien la méthode de Bessel. On détermine ainsi la valeur de $f'$ distance focale de l'association, $f'_1$ étant connue. On en déduit $V_2 = V - V_1$ la vergence de la lentille divergente.

## Exercice 14 La méthode de Badal

La méthode de Badal permet de déterminer la vergence d'une lentille divergente.

On place deux lentilles convergentes, $L_1$ et $L_2$ sur un même axe optique. Un objet est placé au point focal objet $F_1$ de $L_1$ et donne une image conjuguée en $F'_2$ point focal image de $L_2$. On note $f'_1$ et $f'_2$ les distances focales des deux lentilles.

**1. Schématiser le montage.**

On place alors une lentille divergente L de distance focale $f'$ inconnue de façon à ce que son centre optique O soit confondu avec le foyer objet de $L_2$.

**2. Schématiser le nouveau montage.**

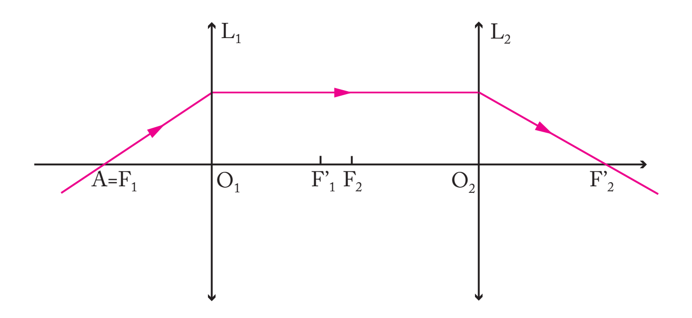
**3. Montrer qu'entre les deux montages, l'image s'est déplacée d'une distance *d* sur l'axe optique telle que $d = -f'^2_2/f'$.**

**4. En déduire une mesure de $f'$.**

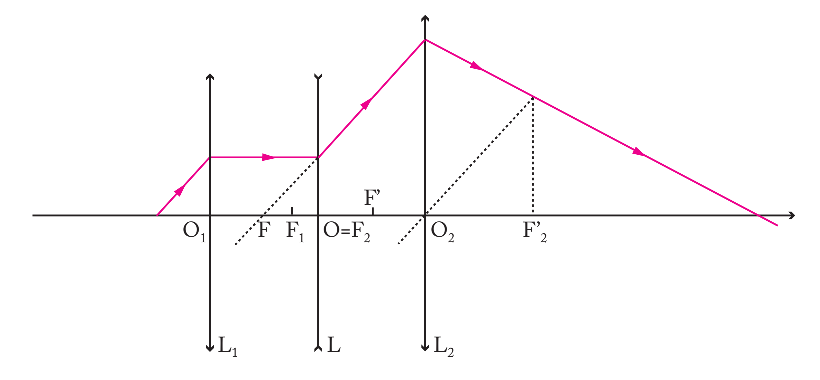
### Solution

**CONSEIL :** cet exercice propose une méthode de focométrie adaptée à l'étude de lentilles divergentes. Il ne présente pas de difficulté particulière, laissez-vous guider par les questions.

**1.** Le schéma du montage est donné ci-dessous. L'image $A'_1$ de A à travers ($L_1$, $L_2$) est en $F'_2$.




**2.** Le nouveau montage est donné ci-dessous. L'image A" de A à travers ( $L_1$, L, $L_2$ ) est en A", distant de *d* de A' = $F_2$.




**3.** Le schéma synoptique s'écrit :

$$A \xrightarrow{L} \infty \xrightarrow{L} F' \xrightarrow{L_2} A''$$

Appliquons la relation de Newton aux points conjugués (F', A") à travers $L_2$ :

$$\overline{F_2F'} \cdot \overline{F'_2A'} = -f'^2_2$$

Avec $\overline{F_2F'} = \overline{OF'} = f'$ et $\overline{F'_2A'} = \overline{A'A''} = d$, on a finalement :

$$d = -\frac{f'^2_2}{f'}$$

**4.** La relation précédente montre que $f'$ peut être calculée à partir de la mesure de $d$, $f'_2$ étant connue :

$$f' = -\frac{f'^2_2}{d}$$

Cette méthode expérimentale permet de déterminer la distance focale d'une lentille divergente en mesurant le déplacement *d* de l'image A'B', connaissant la focale de la lentille convergente $L_2$.

# L'œil, la loupe et autres instruments à une lentille

Un peu d'histoire

## Mesure du diamètre de la pupille de l'œil

Dans son « *Dialogue sur les deux grands systèmes du Monde* » Galilée rapporte une expérience réalisée vers 1632 :

« Je prends deux bandes de papier, l'une noire, l'autre blanche, la largeur de la noire étant la moitié de la blanche ; je fixe la blanche sur un mur et l'autre sur [...] un support, à quinze ou vingt coudées environ ; je m'éloigne ensuite de cette dernière d'une distance égale dans la même direction; c'est évidemment à cette distance que doivent concourir les lignes droites qui partent de la largeur de la feuille blanche et qui touchent les bords de l'autre bande placée au milieu ; si donc, on met l'œil au point de concours, la bande noire du milieu doit cacher exactement la bande blanche à l'autre extrémité, à supposer toutefois que l'on ne regarde que d'un seul point ; si malgré tout, on trouve que le bord de la bande blanche est encore visible, il faudra en conclure nécessairement que les rayons visuels ne proviennent pas d'un seul point. Pour que la bande blanche soit cachée par la noire, il faudra rapprocher l'œil ; approchons-le donc jusqu'à ce que la bande du milieu cache la bande la plus éloignée et notons de combien il a fallu se rapprocher : la quantité de ce rapprochement mesure la distance entre l'œil et le véritable point de concours des rayons visuels, dans le cas de cette observation. De plus, nous connaîtrons ainsi le diamètre de la pupille ou plutôt du trou d'où proviennent les rayons visuels : ce diamètre est par rapport à la largeur de la carte noire comme la distance qui sépare le point d'intersection des lignes passant par les bords des deux bandes et l'endroit où est l'œil dès que la bande éloignée est cachée par la bande intermédiaire, comme cette distance, dis-je, est par rapport à la distance entre les deux bandes. »

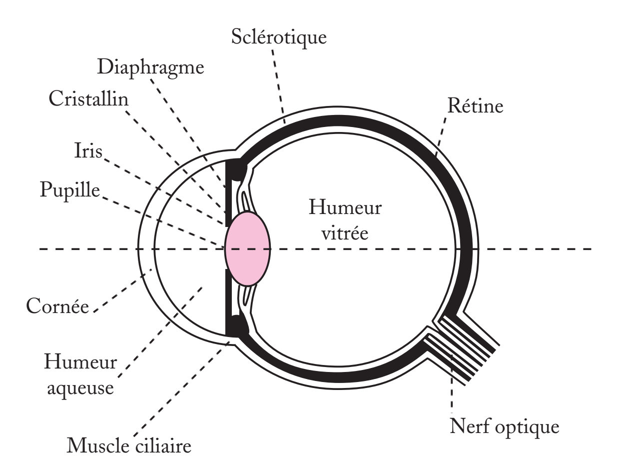
Dans ce chapitre, on s'intéresse aux instruments optiques « simples » formés d'une seule lentille.

# 1. L'ŒIL

## 1.1. Modélisation de l'œil

**L'œil** peut être modélisé par une lentille convergente ensemble cornée-cristallin de distance focale variable, de $f'_{min}$ à $f'_{max}$ (la distance focale varie par contraction des muscles ciliaires), et formant les images sur la rétine.
Au repos, la distance focale de l'œil est maximum : l'œil voit un objet placé au *punctum remotum*, défini comme le point le plus éloigné dont l'œil peut former une image nette sur la rétine.
En accommodation maximale, la distance focale de l'œil est minimum et l'œil voit un objet situé à son *punctum proximum*.
On définit l'amplitude d'accommodation $A$ par :

$$A = V_{max} - V_{min} = \frac{1}{f'_{min}} - \frac{1}{f'_{max}}$$




## 1.2. Défauts de l'œil

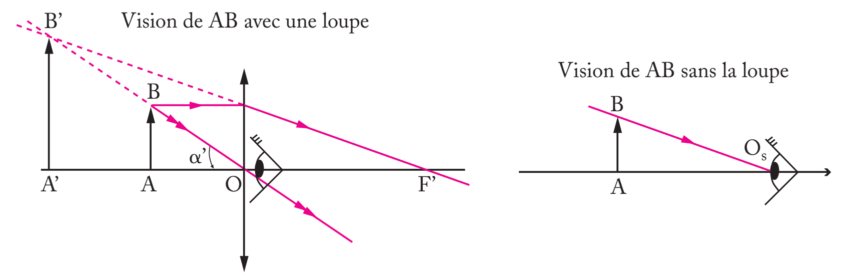
Pour un œil **normal** ou **emmétrope**, le *punctum remotum* est à l'infini et le *punctum proximum* à $d_m$ = 25 cm.
Un œil **amétrope** est dit **myope**, s'il est trop convergent et **hypermétrope** s'il est trop divergent. On corrige un œil amétrope en corrigeant la focale de l'œil par une autre lentille (lunettes ou verres de contact).
Il existe d'autres défauts de l'œil comme la **presbytie** due à la fatigue des muscles d'accommodation ou l'**astigmatisme** due au fait que l'œil n'est pas « convergent » de la même manière dans toutes les directions.

## 2. La loupe

### 2.1. Définition

La **loupe** est une lentille convergente généralement biconvexe : on l'utilise pour obtenir d'un objet réel (timbre,…) une image virtuelle et agrandie. Cette image est obtenue en plaçant l'objet entre le foyer objet et le centre optique de la lentille.

### 2.2. Grandeurs caractéristiques




Le **grossissement** $G$ est défini par le rapport :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Avec $\delta$ = OA' la distance de visée et $d_m = O_SA$ la distance minimum de vision distincte, le grossissement de la loupe, exprimé en fonction du grandissement $\gamma$, est :

$$G = \gamma d_m \delta$$

On définit la **puissance** $P$ d'une loupe par :

$$P = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{G}{d_m}$$

# L'ŒIL

## Exercice 1 Correction de myopie et d'hypermétropie

Un œil myope a son *punctum proximum* ($P_P$) à 5 cm devant lui et son *punctum remotum* ($P_R$) à 5 m devant lui.

**1. Quelle lentille doit-on utiliser pour rendre possible une vision de loin sans accommodation ?**

**2. Même question pour un œil hypermétrope qui a son *punctum proximum* à 50 cm devant lui et son *punctum remotum* à 2 m derrière lui.**

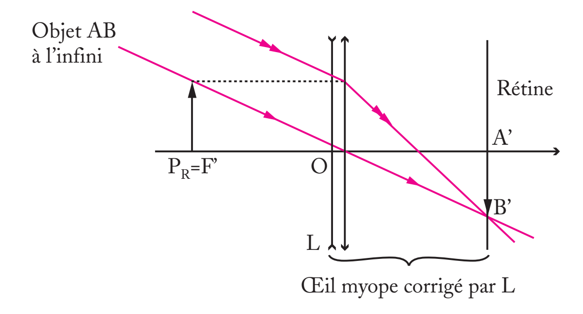
### Solution

L'œil possède une lentille, le cristallin, dont la distance focale peut être modifiée : c'est le phénomène d'accommodation. Le *punctum remotum* repère la position d'un objet que l'œil voit distinctement lorsqu'il n'accommode pas : ainsi, un œil normal a son *punctum remotum* à l'infini. L'œil myope ou hypermétrope a son *punctum remotum* à distance finie. L'image à travers la « lentille-œil » se forme sur la rétine.
Corriger un œil myope ou hypermétrope consiste à accoler une lentille de correction afin de renvoyer sur la rétine l'image finale d'un objet à l'infini (vision de loin) à travers le système formé de l'association lentille de correction/lentille-œil.
Pour cela, il faut que l'image d'un objet à l'infini à travers la lentille de correction se forme au *punctum remotum* de l'œil ; l'image intermédiaire ainsi formée au *punctum remotum* formera une image finale sur la rétine. Le schéma synoptique est :

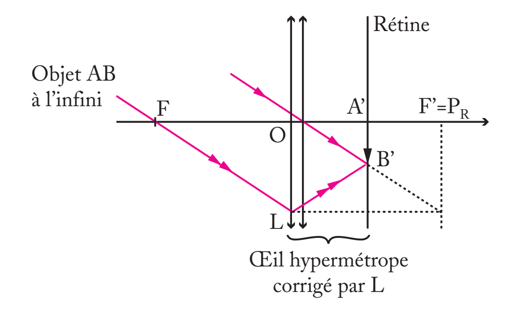
$$\infty \xrightarrow{\text{Lentille de correction}} P_R \xrightarrow{\text{Lentille/œil au repos}} \text{Rétine}$$

Un objet à l'infini donne une image à travers la lentille de correction au point focal image de la lentille. La lentille est accolée à l'œil, on veut donc que le *punctum remotum* de l'œil coïncide avec le point focal image de la lentille.

**1.** Pour l'œil myope, avec un *punctum remotum* à 5 m devant l'œil, on a donc besoin d'une lentille divergente de distance focale $f'_1 = -5$ m




**2.** Pour l'œil hypermétrope, avec un *punctum remotum* à 50 cm derrière l'œil, on a donc besoin d'une lentille convergente de distance focale $f'_2 = 50$ cm.




## Exercice 2 Lunette à double foyer

La presbytie partielle est caractérisée par la diminution de la faculté d'accommodation du cristallin de l'œil. La presbytie totale se définit par l'impossibilité d'accommodation. Un œil totalement presbyte ne voit distinctement que les objets à 2 m devant lui. Ce défaut est corrigé à l'aide de lentilles à double foyer.

**Déterminer les focales des lentilles minces qui corrigent cet œil afin de lui permettre la vision distincte du « paysage » et la lecture nette à 25 cm.**

### Solution

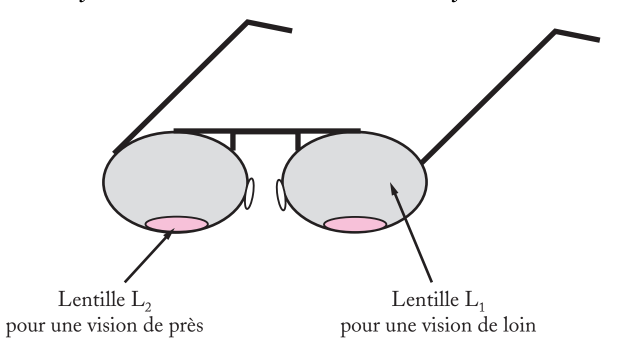
L'œil presbyte a perdu sa faculté d'accommoder : il se comporte donc comme une lentille de focale fixe, qui lui permet de former une image sur la rétine d'un objet placé à 2 mètres devant lui.

Les lunettes à double foyer sont constituées de deux lentilles : une lentille $L_1$ qui corrige la focale de l'œil pour permettre une vision à l'infini et une lentille $L_2$ qui corrige la focale de l'œil pour permettre une vision d'objets à $d_m$ = 25 cm devant celui-ci.

Dans la suite, on considère, à défaut d'indication contraire, que l'œil et la lunette sont accolés.

Les schémas synoptiques sans correction, avec la lentille $L_1$ qui corrige la vision de loin et avec la lentille $L_2$ qui permet la vision de près s'écrivent :

- sans correction : objet à 2 m $\xrightarrow{\text{lentille-œil}}$ rétine
- avec la lentille $L_1$ : objet à l'infini $\xrightarrow{L_1}$ objet à 2 m $\xrightarrow{\text{lentille-œil}}$ rétine
- avec la lentille $L_2$ : objet à 25 cm de l'œil $\xrightarrow{L_2}$ objet à 2 m $\xrightarrow{\text{lentille-œil}}$ rétine



Pour la vision de loin, il faut que la lentille de correction $L_1$ donne d'un objet à l'infini une image 2 mètres devant l'œil. Un objet à l'infini donne, à travers une lentille, une image dans le plan focal image de la lentille. On doit donc avoir

$$f'_1 = -2 \text{ m.}$$

La lentile $L_1$ est donc divergente. Pour la vision de près, la lentille $L_2$ doit donner d'un objet situé à 25 cm devant l'œil une image située à 2 mètres devant l'œil. Soit O le centre de la lentille (qui coïncide avec la position de l'œil), on a donc :

$$\overline{OA} = -25 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \overline{OA'} = -2 \text{ m.}$$

La relation de conjugaison de Descartes s'écrit

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_2}$$

On en déduit la valeur de $f'_2$ :

$$f'_2 = 28{,}6 \text{ cm.}$$

La lentille $L_2$ est une lentille convergente.

## Exercice 3 Amplitude d'accommodation d'un œil normal

On rappelle que l'amplitude d'accommodation est définie par la différence $V_{max} - V_{min}$, où $V_{max}$ est la vergence maximale de l'œil et $V_{min}$ est la vergence minimale de l'œil.

**1. Calculer l'amplitude d'accommodation d'un œil normal (œil emmétrope)**

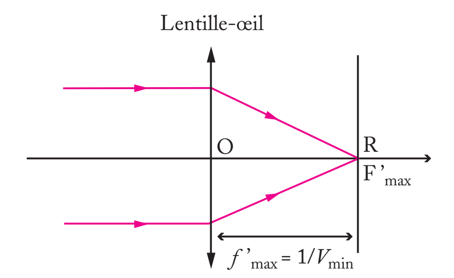
**2. Exprimer l'amplitude d'accommodation d'un œil connaissant les positions du *punctum proximum* et du *punctum remotum*.**

### Solution

**CONSEIL :** pour exprimer les deux vergences, il faut se souvenir que la vergence est minimale lorsque l'œil est au repos : ce qui traduit le fait qu'il voit alors des objets situés à son *punctum remotum* (par définition). De même, la vergence est maximale lorsque l'œil voit distinctement des objets placés à son *punctum proximum*.

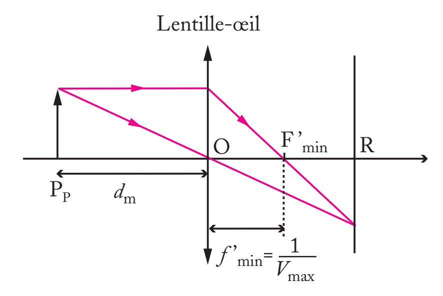
**1.** Cet exercice porte sur le calcul de l'amplitude d'accommodation, définie comme la différence des vergences maximale et minimale. La vergence minimale est celle de l'œil au repos. L'œil normal voit alors un objet situé au *punctum remotum*, c'est-à-dire à l'infini et en forme une image sur la rétine.

$$\overline{OR} = f'_{max} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{OR}} = V_{min}$$



La vergence maximale est celle de l'œil qui accommode au maximum. Il voit alors un objet placé au *punctum proximum* $P_P$ à $d_m$ = 25 cm devant lui. L'image se forme sur la rétine en R. La relation de conjugaison de Descartes s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OR}} - \frac{1}{\overline{OP_P}} = \frac{1}{\overline{OR}} + \frac{1}{d_m} = \frac{1}{f'_{min}} = V_{max}$$




On obtient finalement :

$$V_{max} = V_{min} + \frac{1}{d_m}$$

d'où l'amplitude d'accommodation $A$ :

$$A = V_{max} - V_{min} = \frac{1}{d_m}$$

A.N. $A = 4\ \delta$.

**2.** Comme précédemment, la vergence minimum est obtenue lorsque l'œil emmétrope n'accommode pas : il forme alors d'un objet placé au *punctum remotum* une image sur la rétine. La vergence maximum est obtenue lorsque l'œil accommode au maximum : il forme alors d'un objet placé au *punctum proximum* une image sur la rétine. On a donc :

$$\frac{1}{\overline{OR}} - \frac{1}{\overline{OP_R}} = \frac{1}{f'_{max}} = V_{min}$$

$$\frac{1}{\overline{OR}} - \frac{1}{\overline{OP_P}} = \frac{1}{f'_{min}} = V_{max}$$

On obtient finalement l'amplitude d'accommodation :

$$A = V_{max} - V_{min} = \frac{1}{\overline{OP_R}} - \frac{1}{\overline{OP_P}}$$

Bien sûr, cette expression est valable pour un œil normal avec $\overline{OP_R} = \infty$.

## Exercice 4 Lentilles de contact ou lunettes ?

Un homme affirme : « Je ne peux pas voir distinctement les objets qui sont à plus de $D$ = 21 cm de moi ».

**1. Quel type de lentille de contact faut-il lui prescrire ?**

**2. Comment est modifié le résultat précédent s'il choisit des lunettes sachant qu'elles sont à 1 cm de son œil ?**

## Solution

**CONSEIL : l'homme ne peut voir des objets plus loin que *D* = 21 cm de ses yeux. *D* correspond à son *punctum remotum*. Il est donc myope c'est-à-dire que ses yeux ont une focale trop petite : ils sont trop convergents.**

**1.** L'homme est myope. Même en accommodant, il ne peut compenser ce défaut de vision puisque, ce faisant, il diminue davantage encore la distance focale de son œil. Il faut donc le munir de lentilles divergentes (en lentille de contact ou en lunettes) afin d'augmenter la focale de son œil. Au repos, l'œil voit un objet situé à *D* devant ses yeux. Pour corriger l'œil, il faut que la lentille de correction forme, d'un objet A situé à l'infini, une image A' tel que $\overline{OA'} = -D$ ; le schéma synoptique à travers l'ensemble « lentille de correction/lentille-œil » s'écrit :

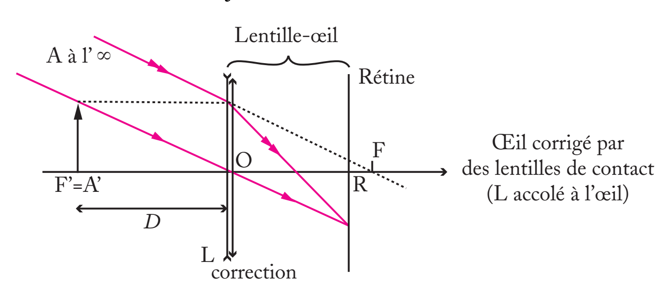
objet à l'infini A $\xrightarrow{\text{lentille de correction}}$ objet A' à 21 cm de l'œil $\xrightarrow{\text{lentille-œil}}$ rétine

Lorsqu'on utilise des lentilles de contact, la lentille de correction est accolée à l'œil.
Un objet à l'infini donne à travers la lentille de correction L une image au foyer image F' de la lentille. On veut que cette image coïncide avec le point A' :

$$\overline{OA'} = \overline{OF'}$$

On en déduit la distance focale de la lentille de correction :

$$f' = -D = -21 \text{ cm.}$$




**2.** Avec des lunettes, il faut prendre en compte le fait que les centres optiques des deux lentilles sont distincts. On note $O_1$ le centre optique de la lentille-œil et $O_2$ celui de la lentille de correction. Pour que l'œil forme de A' une image sur la rétine, on doit avoir :

$$\overline{O_1A'} = -D$$

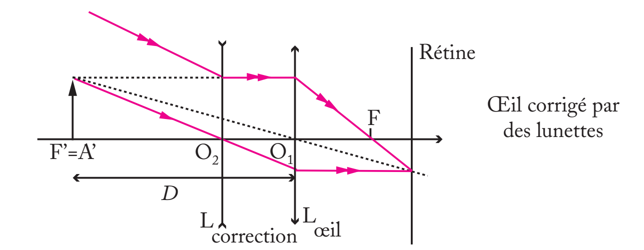
L'image d'un objet à l'infini se forme toujours au point focal image de la lentille de correction, soit :

$$\overline{O_2A'} = f'$$

Avec $\overline{O_2O_1} = e = 1\,\text{cm}$, on obtient finalement :

$$f' = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A'} = e - D = -20\,\text{cm}$$

La lentille est divergente et de distance focale égale à – 20 cm.




## Exercice 5 Voyez-vous assez bien pour passer votre permis de conduire ?

L'œil d'une personne ne voit pas distinctement les objets situés à une distance supérieure à 2 m. Il possède une amplitude d'accommodation de 9 δ.

**1. Quel est le défaut de cet œil et quelle est la position de son *punctum proximum* (P.P.) ?**

**2. Quelle est la nature de la lentille $L_1$ à utiliser pour corriger son *punctum remotum* (P.R.) qui devrait être à l'infini ?**

**3. Quelle est la valeur en dioptrie de la vergence de $L_1$ en supposant que le centre O de $L_1$ est confondu avec le sommet S de l'œil ?**

**4. Que devient le *punctum proximum* de l'œil avec le port de la lentille $L_1$ ?**

Théoriquement, pour passer le permis de conduire, il faut pouvoir voir nettement une plaque d'immatriculation à 20 m devant soi. Par ailleurs, pour des raisons médicales, on préfère corriger la vision des objets éloignés à l'aide d'une lentille dont la vergence en dioptrie est légèrement supérieure à la vergence de $L_1$ (valeur algébrique). On suppose toujours O et S confondus.

**5. Quelle est alors la valeur en dioptries de la vergence de la lentille $L_2$ pour que le P.R. de l'œil se trouve à 20 m ?**

**6. Que devient le P.P. de l'œil avec le port de cette lentille $L_2$ ?**

**7. On considère maintenant que le centre O de $L_2$ se trouve à 1 cm devant S. L'approximation faite précédemment (O et S confondus) modifie-t-elle le choix de $f'_2$ ?**

### Solution

**CONSEIL : dans cet exercice, on considère une personne qui n'est manifestement pas emmétrope puisqu'elle ne voit pas au-delà de 2 m (un œil emmétrope voit jusqu'à l'infini !). Pour connaître parfaitement les caractéristiques de son amétropie, il nous faut connaître les positions de son *punctum proximum* et de son *punctum remotum*. Pour connaître la position de son *punctum proximum*, on peut utiliser l'information donnée par son amplitude d'accommodation : d'après l'exercice précédent, on sait en effet relier amplitude d'accommodation et positions des P.P. et P.R..**

**1.** Le *punctum remotum* de la personne est à 2 mètres devant elle (au lieu d'être à l'infini) : la personne est donc myope. Son amplitude d'accommodation est définie par (voir l'exercice 3 de ce chapitre) :

$$A = V_{max} - V_{min} = \frac{1}{\overline{SP_R}} - \frac{1}{\overline{SP_P}}$$

où S est le centre de la lentille-œil. La position du *punctum proximum* est donc donnée par :

$$\overline{SP_P} = \frac{\overline{SP_R}}{1 - A\overline{SP_R}}$$

A.N. $\overline{SP_P} = -10{,}5\,\text{cm}$.

**2.** L'œil myope est trop convergent par rapport à l'œil normal. Pour lui permettre une vision à l'infini, il faut le corriger avec une lentille divergente $L_1$ qui forme, d'un objet à l'infini, une image en $P_R$.

**3.** L'image d'un objet à l'infini se forme, par définition, au point focal image de la lentille. Si on note O le centre optique de $L_1$, on doit avoir :

$$f'_1 = \overline{OP_R}$$

Avec O et S confondus, on obtient :

$$f'_1 = \overline{SP_R}$$

A.N. $f'_1 = -2$ m.

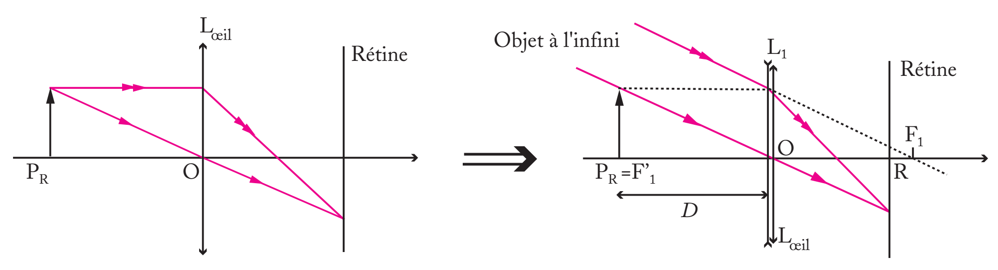
**4.** Le nouveau *punctum proximum* $P_{P1}$ de l'œil corrigé correspond à la position d'un objet qui donne à travers la lentille $L_1$ une image au *punctum proximum* « naturel » $P_P$ de l'œil non corrigé. La relation de conjugaison pour $P_P$ et $P_{P1}$ s'écrit, avec toujours S et O confondus :

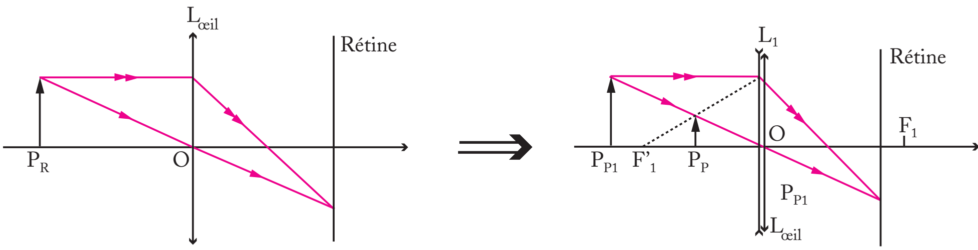
$$\frac{1}{\overline{SP_P}} = \frac{1}{\overline{SP_{P1}}} = \frac{1}{f'_1}$$

On en déduit :

$$\overline{SP_{P1}} = -\frac{1}{A}$$

A.N. $\overline{SP_{P1}} = -11{,}1\,\text{cm}$.




Attention, les schémas ne sont pas à l'échelle !

**5.** On veut cette fois qu'un objet situé à $D$ = 20 m de l'œil forme son image à travers $L_2$ (de centre optique confondu avec S) au *punctum remotum* de l'œil. On doit donc avoir :

$$\frac{1}{\overline{SP_R}} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{f'_2}$$

$$f'_2 = \frac{D\overline{SP_R}}{D + \overline{SP_R}}$$

A.N. $f'_2 = -2{,}22$ cm.

**6.** Comme à la question 4, le nouveau *punctum proximum* $P_{P2}$ de l'œil corrigé correspond à la position d'un objet qui donne à travers la lentille $L_2$ une image au *punctum proximum* $P_P$ de l'œil non corrigé. La relation de conjugaison pour $P_P$ et $P_{P1}$ s'écrit, avec toujours S et O confondus :

$$\frac{1}{\overline{SP_P}} = \frac{1}{\overline{SP_{P2}}} = \frac{1}{f'_2}$$

On en déduit :

$$\overline{SP_{P2}} = \frac{f'_2 f'_1}{f'_2 - f'_1 - A f'_1 f'_2}$$

A.N. $\overline{SP_{P2}} = -11$ cm.

**7.** Reprenons le cas du calcul de $f'_2$ effectué en 5. Avec S et O non confondus et en posant $l = \overline{OS} = 1\,\text{cm}$, il vient :

$$\frac{1}{\overline{OP_R}} - \frac{1}{l - D} = \frac{1}{f'_2}$$

$$f'_2 = \frac{(D - l)\overline{SP_R}}{D + \overline{SP_R}}$$

La correction relative sur $f'_2$ est donc de :

$$\frac{\Delta f'_2}{f'_2} = \frac{l}{D} = 0{,}5/1000\,.$$

## Exercice 6 Œil moyen et vieillissement de l'œil

Pour un œil moyen, la distance $d$ entre le cristallin et la rétine est égale à $d$ = 15 mm ; le $P_P$ et le $P_R$ sont respectivement égaux à $\delta_m$ = 25 cm et l'infini.

**1. Calculer les distances focales du cristallin lorsqu'il est au repos et en accommodation maximale.**

**2.a. Comment varie la distance focale du cristallin en accommodation maximale en fonction de la position du $P_P$ ?**

**b. Sachant qu'en moyenne, le $P_P$ d'un individu de 50 ans est de 1 m, calculer la variation de cette distance focale par rapport à celle d'un individu moyen.**

## Solution

**CONSEIL : dans cet exercice, on étudie la variation de la distance focale de l'œil en fonction de l'âge. L'exercice démarre par une information originale : la distance du cristallin à la rétine. Comment traduire cette information anatomique ? Cette distance correspond, en termes d'optique de l'œil, à la distance entre la lentille (le cristallin) et l'écran (la rétine). Que sait-on ? Qu'un objet situé à l'infini forme son image à travers une lentille dans le plan focal image de cette lentille ; on sait aussi qu'un œil emmétrope au repos voit distinctement un objet à l'infini, c'est-à-dire que l'image d'un objet à l'infini se forme sur sa rétine. À partir de ces informations, il est maintenant possible de répondre aux questions.**

**1.** Le $P_R$ est à l'infini, ceci indique que la convergence d'un faisceau parallèle se fait directement sur la rétine. La distance focale de l'œil au repos est $f'_1 = d = 15$ mm.
En accommodation maximum, un objet placé au $P_P$ forme son image à travers le cristallin en R sur la rétine. ($P_P$, R) vérifie donc la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OR}} - \frac{1}{\overline{OP_P}} = \frac{1}{f'_2}$$

Avec $\overline{OR} = d = 15$ mm et $\overline{OP_P} = -\delta_m = -250$ mm, on a finalement :

$$f'_2 = \frac{d\delta_m}{d + \delta_m}$$

A.N. $f'_2 = 14,2$ mm.
On retrouve un résultat connu : le phénomène d'accommodation permet de diminuer la distance focale du cristallin : $f'_2 < f'_1$.

**2.a.** Posons $d$ la distance $\overline{P_PO}$ (égale à $\delta_m$ pour un œil normal). La distance focale $f'_2$ en accommodation maximale s'écrit :

$$f'_2(\delta) = \frac{d\delta}{d + \delta}$$

Remarquons que :

$$\frac{\mathrm{d}(f'_2)}{\mathrm{d}\delta} = \frac{d^2}{(d + \delta)^2} > 0$$

La souplesse du cristallin se réduisant avec le temps, la distance focale $f'_2$ augmente avec l'âge.
**b.** À 50 ans, correspondant selon l'hypothèse à un $\delta$ de 1 m, la distance focale $f'_2$ est égale à $f'_2(\delta = 1 \text{ m}) = 14,8$ mm, ce qui correspond à une variation de 0,6 mm.

## Exercice 7 Limite de vision distincte d'un enfant

Les limites de vision distincte d'un jeune enfant, mesurées à partir du centre optique O de l'œil, varient entre 8,5 et 21 cm. Pour lui permettre de voir à l'infini sans accommoder, on lui met des lunettes dont le centre optique $O_1$ est situé à $d = 1$ cm de O.

**1. Quelles sont la nature et la vergence des lentilles utilisées dans les lunettes ?**

**2. Quelle est la distance minimale de vision nette de l'œil corrigé ?**

**3. En vieillissant, le cristallin se rigidifie. Les limites de vision distinctes de l'œil nu sont comprises alors entre 16 et 21 cm. Quel est alors le champ de vision distincte de l'œil appareillé des lunettes ?**

## Solution

**CONSEIL : la seule difficulté pour aborder cet exercice consiste à traduire l'information suivante : que représentent les deux limites de vision distincte ? La plus petite (ici 8,5 cm) correspond à la distance de l'objet A à la lentille (le cristallin de l'enfant), l'objet A étant l'objet le plus proche que l'enfant peut voir distinctement, c'est-à-dire, par définition, le *punctum proximum* $P_P$. La limite la plus grande (ici 21 cm) correspond à la distance de l'objet B à la lentille, l'objet B étant l'objet le plus éloigné que l'enfant peut voir distinctement, c'est-à-dire, par définition, le *punctum remotum* $P_R$. Ces deux informations sont suffisantes pour aborder l'exercice !**

**1.** Le $P_R$ de l'œil nu n'est pas à l'infini mais à une distance finie devant l'œil. Il s'agit donc d'un œil myope. Cet œil converge trop, il convient de lui adjoindre une lentille divergente pour lui permettre de voir sans accommoder un objet à l'infini. Elle sera choisie de manière à ce que l'image à travers les lunettes d'un objet à l'infini se forme au $P_R$ de l'œil non corrigé ($P_R$ = F'). La distance focale de la lentille divergente doit donc être égale à :

$$f' = -20 \text{ cm.}$$

**2.** Le point $A_P$ le plus proche vu par l'œil corrigé est celui dont l'image à travers les lunettes correspondant au $P_P$ : l'œil accommode alors au maximum. La relation de conjugaison donne la position du point $A_P$ ($O_1$ et O sont respectivement les centres optiques de la lentille et de l'œil et *d* la distance entre ces deux centres):

$$\frac{1}{\overline{O_1P_P}} - \frac{1}{\overline{O_1A_P}} = \frac{1}{\overline{O_1O} + \overline{OP_P}} - \frac{1}{\overline{O_1A_P}} = \frac{1}{f'}$$

Soit :

$$\overline{A_PO_1} = \frac{f'(\overline{P_PO} - d)}{\overline{P_PO} - d + f'} \qquad \overline{A_PO} = d + \frac{f'(\overline{P_PO} - d)}{\overline{P_PO} - d + f'}$$

A.N. $\overline{A_PO_1}$ = 12 cm, $\overline{A_PO}$ = 13 cm.

Avec ces lunettes, le jeune myope voit tout objet situé à une distance comprise entre 13 cm et l'infini de son œil.

**3.** En vieillissant, le $P_R$ du myope ne varie pas, les lunettes seront toujours adaptées pour la vision de loin. En revanche, le $P_P$ du myope ayant changé ($P_PO$ est passé de 8,5 à 16 cm), le point le plus proche $A_P$ pouvant être vu avec les lunettes est maintenant situé à :

$$\overline{A_PO_1} = \frac{f'(\overline{P_PO} - d)}{\overline{P_PO} - d + f'} \qquad \overline{A_PO} = d + \frac{f'(\overline{P_PO} - d)}{\overline{P_PO} - d + f'}$$

A.N. $\overline{A_PO_1}$ = 6 cm, $\overline{A_PO}$ = 61 cm.

S'il garde les mêmes lunettes, le myope en vieillissant ne pourra plus voir de si près (presbytie).

# LA LOUPE

## Exercice 8 Une lentille convergente utilisée comme loupe

Une lentille convergente de vergence $V = 25$ δ est utilisée comme loupe. On place un objet AB de 1 cm de hauteur, à 1 cm de son foyer objet, entre le foyer et la lentille.

**1.a. Réaliser la construction géométrique à l'échelle 1/2 suivant l'axe optique et à l'échelle 1 dans la direction perpendiculaire de l'objet AB et de son image A'B' à travers la lentille.**

**b. Quelle est la nature de l'image obtenue ?**

**2.a. Trouver par le calcul la position de cette image en fonction du point O, centre optique de la lentille.**

**b. Quelle est la taille de l'image A'B' ?**

**Un observateur se place au point F', foyer image de la lentille.**

**3.a. Sous quel angle $\alpha'$ voit-il l'image A'B' ?**

**b. Calculer l'angle $\alpha$ sans loupe quand l'œil est placé à $D_m$ = 25 cm de AB.**

**c. En déduire le grossissement $G$ de la loupe.**

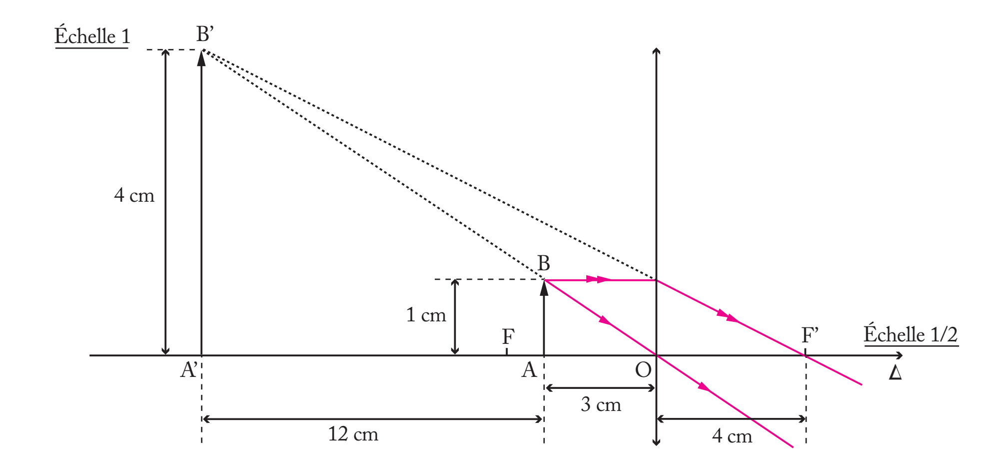
**4. Calculer la distance minimale entre deux points XY, vus en utilisant la loupe sachant que l'œil ne peut séparer deux points vus sous un angle égal à une minute d'arc ($\theta = 3.10^{-4}$ rad).**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice est une application directe du cours sur la loupe, instrument optique constitué d'une seule lentille.**

**1.a.** La distance focale de la lentille est égale à $f' = \dfrac{1}{V} = 4.10^{-2}$ m = 4 cm.

On a donc : $\overline{OA} = -f' + \overline{FA} = -3$ cm.



**b.** L'image obtenue est virtuelle, placée dans le plan objet, agrandie et droite.

**2.a.** La relation de Descartes pour les points (A, A') conjugués à travers L s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\overline{OA'} = \frac{f'\,\overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$$

A.N. $\overline{OA'} = 12$ cm.

**b.** Le grandissement est donné par :

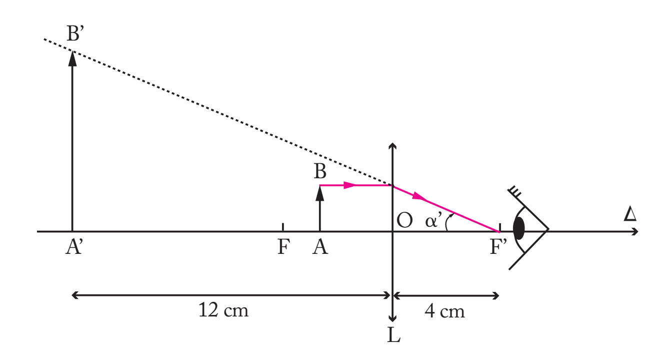
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

A.N. $\gamma = 4$. L'image A'B' est quatre fois plus grande que l'objet.

**3.a.** Calculons $\alpha'$ dans l'approximation paraxiale :

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{FO'} + \overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

A.N. $\alpha' = 0{,}25$ rad.




**b.** L'angle $\alpha$ est donné dans l'approximation paraxiale par :

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\overline{AB}}{d_m}$$

A.N. $\alpha \approx 4.10^{-2}$ rad.

**c.** Le grossissement est donné par :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

A.N. $G = 6{,}25$.

**4.** À une certaine distance, l'œil ne sépare plus deux points voisins X et Y. On connaît

l'écart angulaire $\theta$ qui correspond au pouvoir séparateur de l'œil ($\theta = 3.10^{-4}$ rad), défini par :

$$\phi = \frac{XY}{D}$$

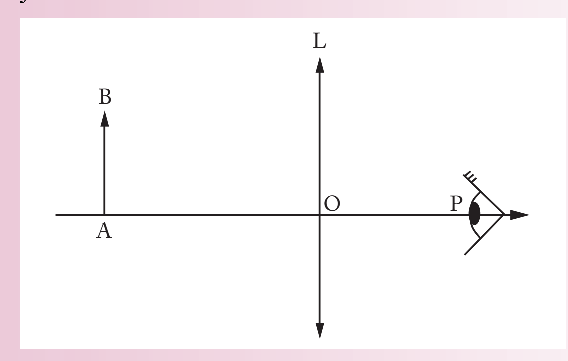
où $D$ est la distance entre l'œil et l'image X'Y' de XY. Avec $D$ = 16 cm et $\theta = 3.10^{-4}$ rad, la distance minimale entre les points XY est donc fournie par :

$$XY = \theta.D$$

Soit XY = $4.8.10^{-5}$ m, XY est donc de l'ordre de 50 micromètres !

## Exercice 9 La loupe

Un observateur regarde un objet AB de 10 mm de haut à travers une lentille de centre O et de vergence $V = 10\ \delta$ qu'il utilise comme une loupe. Il place son œil en P et la lentille à 5 cm de l'objet.




**1. Déterminer les caractéristiques de l'image A'B' de l'objet AB à travers la loupe ? Quelle est la nature de cette image ?**

**2. Tracer à l'échelle 1/2 sur l'axe optique (et arbitraire dans la direction perpendiculaire) la marche de deux rayons lumineux issus de B permettant de retrouver ces résultats.**

**3. Où l'observateur doit-il placer la loupe pour voir l'objet sans accommoder ?**

### Solution

**CONSEIL : dans les questions 1 et 2, on s'intéresse à l'image de l'objet à travers une seule lentille (la loupe). Dans la question 3 seulement, l'œil intervient : on vous demande où placer la lentille pour une vision sans accommodation. Cela signifie que l'image de l'objet à travers la lentille doit se trouver au *punctum remotum* de l'œil, soit à l'infini.**

**1.** La loi de conjugaison de Descartes s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Avec $\overline{OA} = -d = -5$ cm, on calcule :

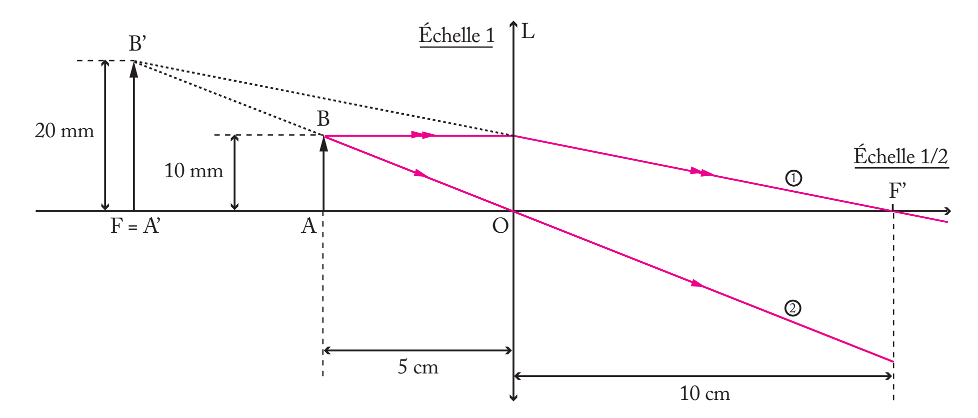
$$\overline{OA'} = \frac{f'd}{d-f'} = \frac{d}{Vd-1}$$

A.N. $\overline{OA'} = -10$ cm. La taille de l'objet A'B' est donnée par le grandissement $\gamma$ :

$$\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\,\overline{AB} = \frac{1}{1 - Vd}\overline{AB}$$

A.N. $\overline{A'B'} = -20$ mm.

**2.** Le rayon ① issu de B et parallèle à l'axe optique émerge de la lentille en convergeant vers le point focal image F'. Le rayon ② passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié.




**3.** Pour que l'image de AB soit renvoyée à l'infini, il faut que A coïncide avec le point focal objet de la lentille, c'est-à-dire que la lentille soit placé à $\frac{1}{V}$ = 10 cm de l'objet. L'intérêt de cette position est que l'œil observe à travers la lentille sans accommoder, c'est-à-dire sans que l'œil ne se fatigue !

## Exercice 10 Correction d'hypermétropie avec une loupe

Un hypermétrope dont le $P_P$ est à 30 cm et le $P_R$ à 1 m derrière l'œil utilise une loupe de vergence $V$ = 10 δ ; l'œil est soit collé à la loupe soit placé dans le plan focal image de la loupe.

**1. Expliquer pourquoi le $P_R$ est placé derrière l'œil.**

**2. Déterminer dans les deux cas la position de l'objet le plus proche visible nettement avec la loupe**

**3. Déterminer dans les deux cas la position de l'objet le plus éloigné visible nettement avec la loupe.**

### Solution

**CONSEIL : dans cet exercice, on considère l'association de deux systèmes optiques simples, l'œil et la loupe, c'est-à-dire l'association de deux lentilles (le cas où l'œil n'utilise pas la loupe est classique). Lorsque l'œil utilise la loupe, les points qu'il est susceptible de voir correctement sont ceux qui, à travers la loupe, appartiennent à son champ de vision, c'est-à-dire ceux qui sont compris entre le *punctum remotum* et le *punctum proximum*.**

**1.** Un œil hypermétrope n'est pas assez convergent, pour voir un objet situé à l'infini : il faut qu'il accommode. L'image de cet objet se forme derrière la rétine. Il ne peut donc voir aucun objet net sans accommoder. Pour y remédier il faut que le $P_R$ de l'œil hypermétrope soit confondu avec l'image A'B' par la lentille L correctrice d'un objet AB situé à l'infini, c'est-à-dire le foyer F' image de L. Le p*unctum remotum* d'un œil hypermétrope est donc virtuel.
L'hypermétrope voit distinctement des objets réel situés au-delà du $P_P$ et des objets virtuels situés en aval du $P_R$. Le champ de vision avec la loupe correspond à l'ensemble des points de l'axe optique dont les images à travers la loupe appartiennent au champ de vision de l'œil nu.

**2.** La relation de conjugaison donne la position du point $A_P$ dont l'image à travers la loupe correspond au $P_P$. $O_1$ et O sont respectivement les centres optiques de la loupe et de l'œil et $d$ la distance entre ces deux centres optiques O et $O_1$ :

$$\frac{1}{\overline{O_1P_P}} - \frac{1}{\overline{O_1A_P}} = \frac{1}{\overline{O_1O} + \overline{OP_P}} - \frac{1}{\overline{O_1A_P}} = \frac{1}{f'}$$

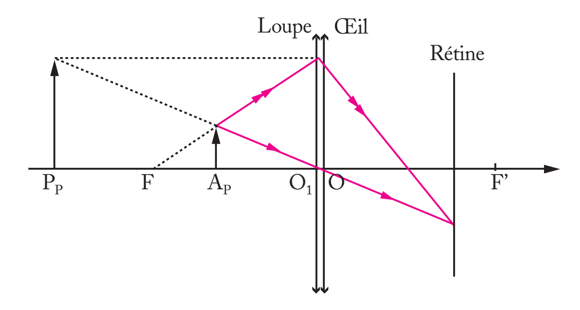
Soit

$$\overline{A_PO_1} = \frac{f'(\overline{P_PO} - d)}{\overline{P_PO} - d + f'}, \quad \overline{A_PO_1} = d + \frac{f'(\overline{P_PO} - d)}{\overline{P_PO} - d + f'}$$

Lorsque l'œil est placé sur la loupe ($d = 0$, figure ci-dessous), on calcule :

$$\overline{A_PO_1} = \overline{A_PO} = \frac{f'\overline{P_PO}}{\overline{P_PO} + f'} = \frac{\overline{P_PO}}{V\overline{P_PO} + 1}$$

A.N. $\overline{A_PO_1} = 7{,}5$ cm.




Lorsque l'œil est dans le plan focal image de la loupe ($d = f'$), nous obtenons alors :

$$\overline{A_PO_1} = \frac{V\overline{P_PO} - 1}{V\overline{P_PO}} \qquad \overline{A_PO} = \frac{2V\overline{P_PO} - 1}{V\overline{P_PO}}$$

A.N. $\overline{A_PO_1} = 6{,}66$ cm, $\overline{A_PO} = 16{,}66$ cm.

**3.** Un raisonnement identique peut être fait pour déterminer le point $A_R$ dont l'image à travers la loupe correspond au $P_R$ de l'œil nu. On obtient alors :

Soit :

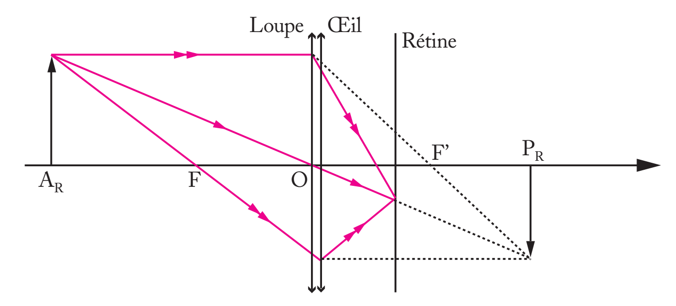
$$\frac{1}{\overline{O_1P_R}} - \frac{1}{\overline{O_1A_R}} = \frac{1}{\overline{O_1O} + \overline{OP_R}} - \frac{1}{\overline{O_1A_R}} = \frac{1}{f'}$$

$$\overline{A_RO_1} = \frac{\overline{P_RO} - d}{V(\overline{P_RO} - d) + 1}, \quad \overline{AO} = d + \frac{\overline{P_RO} - d}{V(\overline{P_RO} - d) + 1}$$

Lorsque l'œil est placé sur la loupe ($d = 0$), les expressions précédentes deviennent :

$$\overline{A_RO_1} = \overline{A_RO} = \frac{\overline{P_RO}}{V\overline{P_RO} + 1}$$

A.N. $\overline{A_RO_1} = 11{,}1$ cm.




Lorsque l'œil est dans le plan focal image de la loupe ($d = f'$), nous obtenons alors :

$$\overline{A_RO_1} = \frac{V\overline{P_RO} - 1}{V^2\overline{P_RO}} \qquad \overline{A_RO} = \frac{2V\overline{P_RO} - 1}{V^2\overline{P_RO}}$$

A.N. $\overline{A_RO_1} = 11$ cm, $\overline{A_RO} = 21$ cm.

Les images se déplacent dans le même sens que les objets : lorsque l'hypermétrope place son œil sur la loupe, son champ de vision distincte correspond donc à des objets placés entre 7,5 cm et 11,1 cm de la loupe tandis que lorsqu'il place son œil dans le plan focal-image de la loupe, ce champ correspond à des objets placés entre 6,66 cm et 11 cm de la loupe.

## Exercice 11 Loupe de philatéliste

Une loupe de philatéliste est assimilable à une lentille mince convergente de distance focale $f'$. L'utilisateur possède une vue « normale », c'est-à-dire qu'il voit à l'infini sans accommoder (œil au repos) et jusqu'à la distance minimale $d_m$ en accommodant au maximum.

On définit le grossissement personnel de cette loupe pour cet utilisateur par le rapport d'angles $G = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ où $\alpha_2$ est l'angle sous lequel est vue l'image de l'objet observé au travers de la loupe (on suppose l'œil placé directement derrière la loupe) et $\alpha_1$ l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu en accommodation maximum.

**1. Calculer $G$ si l'observateur observe à travers la loupe sans accommoder.**

**2. Calculer $G'$ si l'observateur observe en accommodant au maximum.**

**3. Effectuer les applications numériques avec $f'$ = 2 cm et $d_m$ = 25 cm.**

On considère maintenant un observateur myope ; son intervalle de vision distincte est [9,4 cm ; 25 cm].

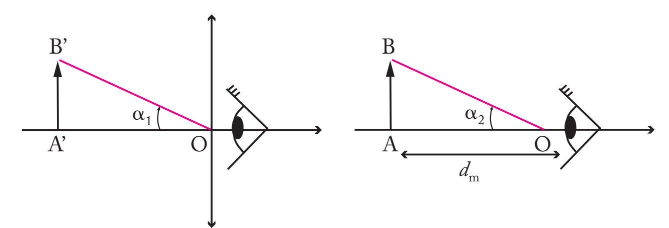
**4. Calculer le grossissement personnel $G''$ pour cet utilisateur en supposant qu'il observe avec la loupe sans accommoder (et sans lunettes !).**

## Solution

**CONSEIL : dans cet exercice, comme dans le précédent, on considère l'association de deux lentilles, la loupe et l'œil. Dans chaque question, ce qui change, ce sont les caractéristiques de l'œil, c'est-à-dire son *punctum proximum* (pour la mesure de $\alpha_1$) et la position de l'objet qu'il regarde à travers la loupe (position de A' pour la mesure de $\alpha_2$).**

Les mesures des angles $\alpha_1$ et $\alpha_2$ permettent de comparer la taille (angulaire) de l'objet vu à l'œil nu, c'est-à-dire à travers une seule lentille (l'œil) et celle de l'objet vu à travers l'association des deux lentilles accolées (loupe/œil). Dans le cas où l'œil regarde l'objet à l'œil nu, il place l'objet à son *punctum proximum*, c'est-à-dire qu'il se rapproche le plus près possible de l'objet.

Si AB désigne l'objet transverse observé par l'œil en O et A'B' son image à travers la loupe, notons qu'en général, l'angle $\alpha_2$ est donné par : $\alpha_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}}$, tandis que l'angle $\alpha_1$ est donné par $\alpha_1 = \frac{AB}{d_m}$.




**1.** L'œil est normal ; son *punctum proximum* est à la distance $d_m$ = 25 cm de O. Si l'œil voit à travers la loupe sans accommoder, c'est que l'image A'B' est renvoyée à l'infini. L'objet AB est donc dans le plan focal objet de la lentille et on a :

$$\alpha_2 = \frac{AB}{f'}$$

soit

$$G = \frac{d_m}{f'}$$

**2.** En accommodation maximale, l'œil voit l'image A'B' de AB à son *punctum proximum* : OA' = $d_m$. On a alors :

$$G' = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{A'B'}{OA'}\frac{d_m}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}.$$

$G'$ est donc égal au grandissement de la loupe. La relation de conjugaison de Descartes s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Avec OA' = $d_m$, il vient :

$$OA = \frac{f' d_m}{f' + d_m}$$

Finalement, le grossissement $G'$ s'écrit :

$$G' = \frac{f' + d_m}{f'}$$

**3.** L'application numérique conduit à $G = 12{,}5$ et $G' = 13{,}5$.

**4.** L'œil est myope et lorsqu'il regarde à travers la loupe, il n'accommode pas ; sans loupe, l'objet AB est à son *punctum proximum* et avec la loupe, il regarde un point situé à son *punctum remotum*. L'énoncé donne les limites de vision distincte du myope : la limite inférieure donne son *punctum proximum* (à 9,4 cm de O) et la limite supérieure donne la position du *punctum remotum* (à 25 cm de O). Si le myope utilise la loupe sans accommoder, il voit une image A'B' à son *punctum remotum*, soit à $d_R = 25$ cm. On retrouve le calcul effectué pour un utilisateur à vue normal mais accommodant au maximum. En revanche, sans loupe (et toujours sans lunettes !), le myope voit l'objet AB à son *punctum proximum*, soit à $d_P = 9{,}4$ cm. On a donc :

$$\alpha_2 = \frac{A'B'}{OA'} \quad \text{avec} \quad OA' = d_R, \; OA = \frac{f' d_R}{f' + d_R}$$

et

$$\alpha_1 = \frac{AB}{d_P}$$

Finalement :

$$G'' = \frac{A'B'}{d_P}\frac{d_R}{AB} = \frac{d_R}{d_P}\frac{OA'}{OA} = \frac{d_R}{d_P}\frac{f' + d_R}{f'}$$

On obtient $G'' = 35{,}9 > G$ et $G'$. L'usage d'une loupe est plus « intéressant » pour le myope.

## Exercice 12 Puissance d'une loupe

**En utilisant les hypothèses de l'exercice 11, calculer la puissance de la loupe lorsque l'œil est au repos dans chacun des deux cas proposés.**

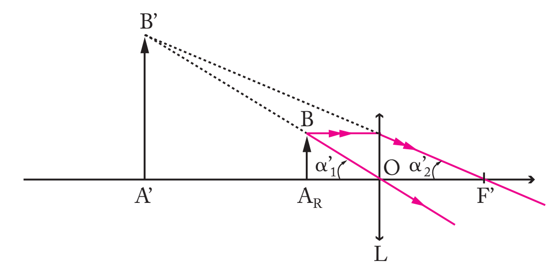
### Solution

**CONSEIL :** la seule difficulté ici est de connaître la définition de la puissance. Autrement dit, pas de difficulté particulière !

Par définition, la puissance $P$ de la loupe est le rapport entre le diamètre apparent de l'image et la dimension réelle de l'objet :

$$P = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{1}{f'}$$

Sur la figure ci-dessous, $\alpha' = \alpha'_1$ quand l'œil est collé à la loupe et $\alpha' = \alpha'_2$ quand l'œil est dans le plan focal image de la lentille.




Pour que l'œil soit au repos, il faut que l'objet soit placé de manière à ce que son image à travers la loupe se forme au $P_R$. Par construction, on a :

$$\tan\alpha' \approx \alpha' = \frac{AB}{A_RO}$$

et donc

$$P = \frac{1}{A_RO}$$

D'après l'exercice précédent et dans le cas où l'œil est « collé » à la loupe, on a :

$$P = \frac{V\overline{P_RO}+1}{\overline{P_RO}} = 9\ \delta$$

Lorsque l'œil est dans le plan focal image de la loupe, on a :

$$P = \frac{V^2\overline{P_RO}}{2V\overline{P_RO}-1} = 10\ \delta$$

**REMARQUE : plus la focale de la loupe est petite plus sa puissance est grande !**

## Exercice 13 La loupe associée à l'œil

Une loupe est constituée d'une lentille épaisse convergente de focale égale à 5 cm. On cherche à observer une lettre d'imprimerie de 2 mm de hauteur placée à 3 cm de la lentille. Le *punctum proximum* de l'œil est fixé à 25 cm.

**1. Schématiser le système optique.**

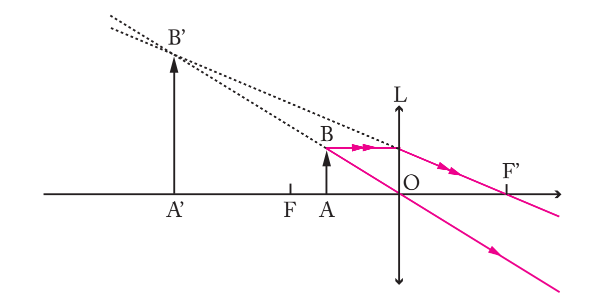
**2. Calculer le grossissement commercial de cette loupe.**

**3. Quelle est la taille de la lettre d'imprimerie observée avec la loupe ?**

### Solution

**CONSEIL : dans cet exercice, l'observateur regarde un objet à travers une loupe associée à l'œil. L'exercice ne pose pas de difficulté particulière ; dans la première question, on demande simplement de faire un schéma du montage (association de deux lentilles), la question 2) est une question de cours et la question 3) concerne simplement la loupe (caractérisation de l'image d'un objet à travers une lentille).**

**1.**




**2.** Le grossissement commercial $G$ a pour expression :

$$G = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

Dans l'approximation paraxiale, on a :

$$\alpha \approx \frac{AB}{f'}$$

$$\alpha' \approx \frac{AB}{d_m}$$

Il vient donc :

$$G = \frac{d_m}{f'}$$

A.N. $G = 5$.

**3.** Il s'agit d'une image virtuelle observée dans le plan focal objet de la lentille convergente. On a :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

La taille A'B' de la lettre d'imprimerie vue à travers la loupe est donc :

$$A'B' = |\gamma| AB$$

A.N. A'B'= 10 mm.

# Autres instruments à une lentille

## Exercice 14 Appareil photographique

Un objectif photographique, assimilé à une lentille mince sphérique convergente, donne une image nette d'un objet situé à l'infini lorsque la distance entre le plan de la pellicule P et le centre optique O de la lentille est égale à $d$ = 80 mm.

**1. Donner l'expression et la valeur de la vergence $V$ de la lentille.**

**2. On photographie un objet situé à une distance $L$ = 2 m de l'objectif O. Quelle doit être la nouvelle valeur de OP pour obtenir une image nette sur la pellicule ? On négligera la variation de la distance objet-objectif.**

**3. La distance maximale OP est égale à 90 mm. Calculer la valeur de la distance $d_m$ de l'objet à l'objectif pour laquelle on obtient une image nette sur la pellicule.**

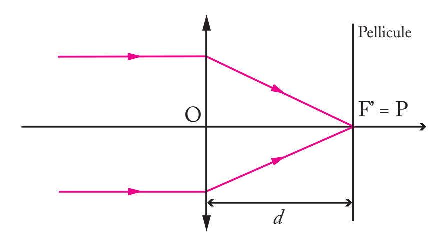
### Solution

**CONSEIL : cet exercice porte sur le principe (très simplifié) d'un appareil photographique, assimilé à une lentille mince et un écran (la pellicule photographique sur laquelle l'image de l'objet photographié doit se situer pour obtenir une photographie « nette »). Traduisons l'énoncé : L'image d'un objet à l'infini se forme sur la pellicule pour une distance lentille-écran égale à $d$ ; on sait que l'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image de la lentille, on a donc $f' = d$. Cette information étant connue, les questions ne posent pas de difficulté majeure.**

**1.** L'image sur la pellicule est nette lorsque l'image de l'objet à l'infini se forme sur la pellicule. Or, l'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image de la lentille. On a donc $d = f'$ et

$$V = \frac{1}{d}$$

A.N. $V$ = 12,5 δ.



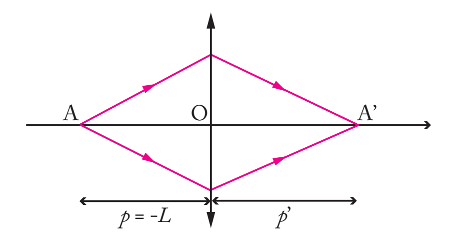

**2.** L'objet A est à une distance $L$ = 2 m de la lentille, on a donc $p = \overline{OA} = -L = -2$ m.

On cherche la valeur de $p' = \overline{OA'}$ de façon à ce que l'image A' de A soit sur la pellicule (A' = P). Il vient donc :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = V$$

$$\overline{OP} = p' = -\frac{L}{1 - V_L}$$

A.N. $\overline{OP} = 83{,}3$ mm.




**3.** On cherche la position de l'objet A ($p = \overline{OA} = -d_m$) dont l'image à travers la lentille se forme en A' tel que $p'_m = \overline{OA'} = \overline{OP} = 90$ mm. On a alors :

$$\frac{1}{p'_m} + \frac{1}{d_m} = V$$

$$d_m = \frac{p'_m}{p'_m V - 1}$$

A.N. $d_m = 72$ cm.

## Exercice 15 Éclairement d'une pellicule photographique

On schématise un appareil photographique par une lentille convergente de focale $f' = 55$ cm, placée à une distance $d$ d'un écran sensible (pellicule).
On veut obtenir des images d'objets placés à une distance du centre optique de lentille variant de 1,2 m à l'infini.

**1. Dans quelles limites doit-on faire varier *d* ?**

Dans le plan de l'écran, on limite l'image à un rectangle centré sur l'axe de côtés $a = 24$ mm et $b = 36$ mm. Le faisceau entrant sur la lentille est limité par un diaphragme $D$ circulaire. On suppose que l'appareil est réglé sur l'infini.

**2. Calculer le rapport des sections droites des deux faisceaux correspondant aux deux points suivants :**

**- le centre du rectangle ;**

**- un des sommets du rectangle.**

**Conclure**

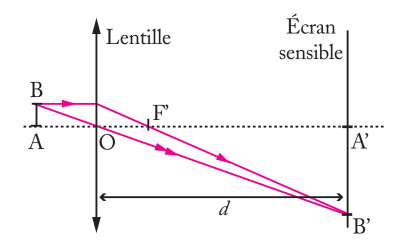
### Solution

**CONSEIL :** cet exercice ne présente pas de difficulté particulière. Il s'agit de l'étude de l'éclairement d'une pellicule photographique, l'appareil photographique étant schématisé par une lentille unique. La seule difficulté intervient lorsqu'on parle d'éclairement, cette notion étant absente, a priori, de l'optique géométrique. L'énoncé vous propose donc une façon de mesurer cet éclairement, comme étant proportionnel à la section des faisceaux lumineux considérés : le problème se ramène donc à un calcul de section, c'est-à-dire un problème (élémentaire) de géométrie !

**1.** Représentons le système schématisant l'appareil photo. On veut que l'image A' d'un objet A à travers la lentille se forme sur l'écran sensible. Pour cela, on doit avoir :

$$\overline{OA'} = d.$$

La position de l'objet varie de $L_m$ = 1,2 m à $L_M$ infini.




On a donc :

$$\overline{OA_m} = -L_m \qquad \overline{OA_M} = -L_M$$

La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{d_m} + \frac{1}{L_m} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{d_M} + \frac{1}{L_M} = \frac{1}{f'}$$

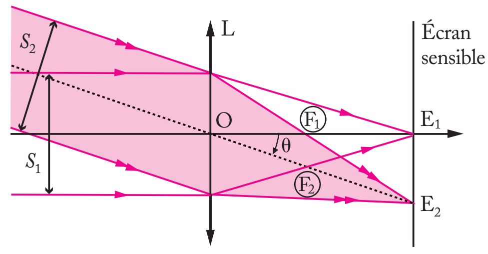
On trouve pour $d_m$ et $d_M$ :

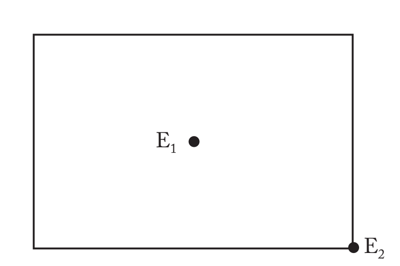
$$d_m = \frac{L_m f'}{L_m - f'}$$

$$d_M = f'$$

A.N. $d_m$ = 57,5 cm, $d_M$ = 55 cm.

**2.** Traçons le faisceau de section $S_1$ qui converge au centre $E_1$ du rectangle ainsi que celui, de section $S_2$, qui converge en un des sommets $E_2$ du rectangle :




($F_1$) Faisceau convergeant au centre $E_1$ du rectangle.
($F_1$) Faisceau convergeant au sommet $E_2$ du rectangle.

Calculons la distance $E_1E_2$ entre le centre et un des sommets du rectangle :

$$E_1E_2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Le diaphragme est circulaire ; la section $S_1$ est égale à la section du diaphragme :

$$S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$$

La section $S_2$ dépend de la section du diaphragme ; soit $D_2$, le diamètre de la section circulaire $S_2$ : $S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$ avec :

$$D_2^2 = D^2 \cos^2\theta = \frac{D^2}{1 + \tan^2\theta}$$

Or θ est également défini par :

$$\tan^2\theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2f'}$$

Il vient donc :

$$S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{4f'^2}{a^2 + b^2 + 4f'^2} \frac{\pi D^2}{4}$$

On en déduit le rapport des sections :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4f'^2}{a^2 + b^2 + 4f'^2}$$

A.N. $\frac{S_1}{S_2} = 0{,}87$.

En admettant que l'intensité lumineuse en un point soit proportionnelle à la section du faisceau de lumière convergeant en ce point, on peut conclure que le diaphragme ne provoque pas de trop grande perte lumineuse dans les coins.

## Exercice 16 Projection de diapositives

Soit une lentille de distance focale $f'$= 5 cm. À 4 m de cette lentille, on place un écran sur lequel on projette une diapositive carrée de 24 mm de côté.

**1. Où doit-on placer la diapositive ?**

**2. Quelle est la taille de l'image ?**

### Solution

**CONSEIL :** cet exercice porte sur l'étude d'un appareil de projection, assimilé à une lentille unique. Il faut comprendre que l'image de l'objet (la diapositive) doit se former sur l'écran de projection (sinon, l'« image » sur l'écran sera floue !) ; on se ramène alors simplement à l'étude de l'image d'un objet à travers une lentille.

**1.** On place la diapositive de façon à ce que son image à travers la lentille soit sur l'écran. L'écran est à $D$ = 4 m de la lentille. La relation de conjugaison de Descartes s'écrit :

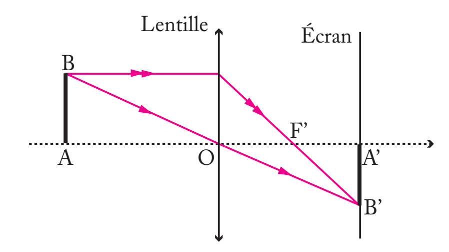
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Soit pour $\overline{OA}$ :

$$\overline{OA} = \frac{f'D}{f' - D}$$

A.N. $\overline{OA} = -4{,}94$ cm.

La diapositive est 4,94 cm devant la lentille, soit pratiquement dans le plan focal objet de la lentille (attention le schéma n'est pas à l'échelle. On a en fait OA' >> AO, l'image A'B' étant presque renvoyée à l'infini).




**2.** La taille de l'image est donnée par le grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{f' - D}{f'}$$

Avec $\overline{AB} = 24$ mm, on trouve $\overline{A'B'} = -1{,}92$ m ($\gamma = -80$).

## Exercice 17 Le projecteur de diapositives

On utilise souvent une lentille convergente mince pour projeter une image A'B' sur un écran de manière à l'agrandir par rapport à l'objet AB. C'est le principe du projecteur de diapositives.

**1. Montrer que si le grandissement est important, on a $f' = -\frac{D}{\gamma}$ où $D$ est la distance entre l'objet et son image.**

**2. Quelle distance focale faut-il prendre sachant que l'on veut projeter sur un écran une image à 2,5 m de l'objet AB, avec un grandissement de l'ordre de – 12.**

Soit une lentille de focale $f = 5$ cm. À 4 m de cette lentille, on place un écran sur lequel on projette une diapositive de 24 mm de côté.

**3. Où doit-on placer la diapositive ?**

**4. Quelle est la taille de l'image ?**

### Solution

**CONSEIL :** cet exercice est, dans l'esprit, identique au précédent. Traduisons quelques détails de l'énoncé cependant : on nous dit que $\gamma$ est important, ce qu'il faut interpréter comme $|\gamma| >> 1$ ($\gamma < 0$, car la lentille est convergente). Les expressions seront donc données en négligeant, par exemple, $X/\gamma$ devant $X$ (où $X$ est une quantité quelconque).

**1.** La relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Le grandissement étant $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, on a $\overline{OA} = \frac{\overline{OA'}}{\gamma}$.

Avec $\left|\frac{1}{\gamma}\right|$ << 1 (l'énoncé précise que γ est important), on a donc OA' >> OA et la relation de conjugaison devient :

$$f' \approx -\overline{OA}$$

Par ailleurs, la distance $D$ entre l'objet et l'image s'écrit :

$$D = \overline{AA'} = -\overline{OA} + \overline{OA'} = \overline{OA'}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \approx \overline{OA'}$$

On a donc $\overline{OA} = \frac{D}{\gamma}$, soit en reportant dans la relation de conjugaison :

$$f' \approx -\frac{D}{\gamma}$$

**2.** L'application numérique ($D$ = 2,5 m, γ = – 12) conduit à $f'$ = 20,8 cm. La distance focale de la lentille sera égale à 0,2 m ce qui correspond à une vergence de 5 dioptries.

**3.** On place la diapositive de façon à ce que son image à travers la lentille se forme sur l'écran. L'écran est à $D$ = 4 m de la lentille (on rappelle que $D \approx \overline{OA'}$). La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Soit pour $\overline{OA}$ :

$$\overline{OA} = \frac{f'D}{f' - D}$$

A.N. $\overline{OA}$ = – 4,94 cm. La diapositive est 4,94 cm devant la lentille, soit pratiquement au point focal objet de la lentille.

**4.** La taille de l'image est donnée par le grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{f' - D}{f'}$$

A.N. γ = – 80. Avec $\overline{AB}$ = 24 mm, on obtient $\overline{A'B'}$ = 1,92 m.

Chapitre 7

# Le microscope et la lunette

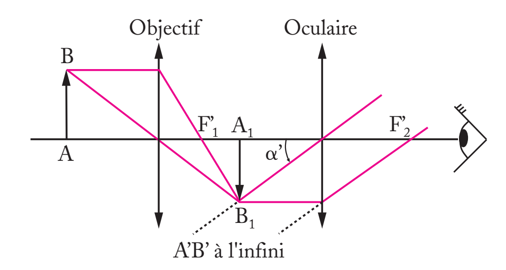
Un peu d'histoire

## Histoire de la microscopie

Au XVI^e siècle, se développe l'idée de regarder les objets non plus directement mais à l'aide d'une loupe. De cette idée naît la microscopie, du grec *skopein* (examiner) et *mikros* (petit). La microscopie optique (on dit aussi photonique) va rapidement s'imposer en biologie comme la technique d'observation indispensable. Au cours du XIX^e siècle, elle permet des découvertes importantes, comme la découverte par Pasteur des organismes vivants responsables de la fermentation (on pensait à l'époque qu'il s'agissait d'un processus de génération spontanée) ; Pasteur découvre ainsi qu'il est possible de détruire des ferments étrangers : la pasteurisation est née !
La microscopie va se développer considérablement au XX^e siècle grâce à des techniques nouvelles, notamment avec le développement de l'optique électronique. Né de cette discipline, le microscope électronique est conçu par analogie avec le microscope photonique classique. La résolution atteinte a permis de développer l'étude de la matière à l'échelle atomique. Le microscope électronique va se perfectionner avec la mise au point du principe de balayage de faisceaux d'électrons très focalisés, donnant naissance à la microscopie électronique à balayage. Cette technique de balayage sera également appliquée à la microscopie photonique. Plus récemment, les travaux en mécanique quantique et notamment, sur l'effet tunnel, ont permis le développement de la microscopie par effet tunnel, puis vers 1980 de la microscopie de champ proche. Pour la première fois, les atomes étaient vus !

## 1. Le microscope

Un exemple typique d'instrument optique est le microscope. Les grandeurs que nous définissons ici sont valables pour tout autre instrument optique à système centré.
Le microscope est composé de deux parties, chacune modélisée par une lentille convergente :
- l'**objectif** qui donne de l'objet AB à observer une image réelle $A_1B_1$, agrandie et renversée par rapport à l'objet ;
- l'**oculaire** que l'observateur utilise comme une loupe pour voir l'image définitive A'B'.
Le fonctionnement du microscope est dit **normal** quand l'image intermédiaire $A_1B_1$ se trouve dans le plan focal objet (en $F_2$) de l'oculaire, de sorte que l'image définitive A'B' sera rejetée à l'infini et qu'un œil normal placé en $F'_2$ pourra observer A'B' sans accommodation.




## 2. Grandeurs caractéristiques

### 2.1. Puissance

La **puissance** *P* est le rapport de l'angle α', sous lequel on voit l'image A'B' à travers l'instrument optique, par la dimension transversale AB de l'objet.

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

La **puissance intrinsèque** $P_i$ d'un microscope correspond à la puissance obtenue lorsque l'image A'B' est renvoyée à l'infini. Si $\Delta = \overline{F'_1F_2}$ désigne la distance entre le point focal image de l'objectif et le point focal objet de l'oculaire, on a :

$$P_i = \frac{\Delta}{f'_1 f'_2}$$

### 2.2. Grandissement

Le **grandissement** est le rapport de dimensions transversales de l'image sur celle de l'objet. Dans le microscope, il peut y avoir des grandissements relatifs à l'objectif, à l'oculaire et au microscope pris dans son ensemble, mais habituellement, c'est le grandissement de l'objectif qui est le plus utilisé :

$$\gamma_{obj} = \frac{A_1B_1}{AB}$$

## 2.3. Grossissement

Le grossissement $G$ d'un microscope est, par définition, égal au rapport entre les diamètres apparents maximaux d'un objet vu à travers le microscope ou vu à l'œil nu à la distance minimum $d_m$ de vison distincte :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = P d_m$$

Pour pouvoir comparer les performances des microscopes, les fabricants ont choisi une distance minimale de vision distincte arbitraire de 25 cm. Le **grossissement commercial** $G_c$ correspondant est :

$$G_c = \frac{P_i}{4}$$

# Le microscope

## Exercice 1 Étude d'un microscope

Un microscope est muni d'un objectif et d'un oculaire dont les distances focales sont respectivement $f'_1$ = 1 cm et $f'_2$ = 5 cm. La distance entre les centres optiques de l'oculaire et de l'objectif est notée $D$ et vaut 15 cm. L'oculaire est réglé pour une vision sans accommodation par un observateur à vue normale.

**1. Calculer le grossissement commercial $G_c$ du microscope, défini comme le rapport des angles $\alpha'$ et $\alpha$, où $\alpha'$ est l'angle sous lequel est vue l'image de l'objet à travers le microscope et $\alpha$ l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu à la distance minimale de vision distincte $d_m$ = 25 cm.**

**2. Calculer l'angle sous lequel on voit à travers cet instrument un objet dont le diamètre est de 20 μm ainsi que le diamètre d'un objet qui serait vu, à l'œil nu, sous ce même angle, à la distance de 25 cm.**

**On éloigne l'oculaire de l'objectif de manière à augmenter de $d$ = 10 cm la distance $D$ entre l'oculaire et l'objectif.**

**3. Quelle est la nouvelle valeur $G_c'$ du grossissement commercial ?**

**4. De combien et dans quel sens faut-il déplacer le système optique par rapport à l'objet pour rétablir la mise au point ?**

**5. Le résultat est obtenu en tournant de deux tours et demi la vis micrométrique. Quel est le pas de cette vis ?**

On recouvre l'objet d'une lamelle de verre de 0,5 mm d'épaisseur, à faces parallèles. On supposera l'objet au contact de la lamelle. On constate que, pour obtenir de nouveau une image nette, il faut tourner la vis micrométrique de 72 centièmes de tour.

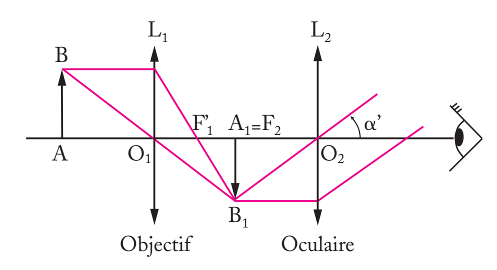
**6. Quel est l'indice du verre de la lamelle ?**

### Solution

**CONSEIL :** un microscope est l'association de deux lentilles. Aussi, s'il existe des définitions qui sont propres à cet instrument (on étudie ici le grossissement commerciale), les connaissances requises sont toujours celles relatives à une association de lentille : relation de conjugaison d'une lentille et expression du grandissement.

Traduisons maintenant un point particulier de l'énoncé : on nous dit que l'observation avec le microscope se fait sans accommodation. L'objet A forme à travers l'oculaire une image (intermédiaire) $A_1$ qui sert d'objet pour l'objectif ; l'image de $A_1$ à travers l'objectif est l'image définitive A' de A à travers le microscope. C'est cette image qui est vue par l'œil. Un œil emmétrope verra distinctement A' sans accommoder si ce dernier est renvoyé à l'infini. Cette condition permet de déterminer la position de l'image intermédiaire $A_1$ (dans le plan focal objet de l'oculaire).

**REMARQUE :** on n'indique pas de flèches sur les traits rouges de la figure ci-dessous qui ne sont pas des rayons mais servent à construire les images successives (par exemples $BO_1B_1$ est interrompu).




**1.** Le grossissement commercial est défini par :

$$G_c = \frac{P_i}{4} = \frac{\Delta}{4f_1'f_2'}$$

avec $\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f_1' + D - f_2' = 9$ cm.

On a donc :

$$G_c = \frac{D - f_1' - f_2'}{4f_1'f_2'}$$

A.N. $G_c = 45$.

**2.** On considère un objet de 20 µm. α' est l'angle sous lequel est vue l'image A'B' de l'objet AB à travers le microscope. La puissance intrinsèque $P_i$ est définie par :

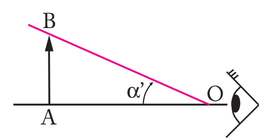
$$P_i = \frac{\alpha'}{AB} = 4G_c = \frac{D - f_1' - f_2'}{f_1'f_2'}$$

On a donc :

$$\alpha' = \frac{D - f_1' - f_2'}{f_1'f_2'}AB$$

A.N. $\alpha' = 3{,}96.10^{-3}$ rad.

Supposons que l'objet AB soit vu sous cet angle α' sans microscope à la distance $AO = d_m = 25$ cm (ci-dessous).




Donc :

$$AB = d_m \tan\alpha'$$

A.N. AB = 0,99 mm.

**3.** En éloignant l'oculaire de l'objectif, on éloigne le foyer image de $L_1$ du foyer objet de $L_2$, le nouveau grossissement commercial du microscope est obtenu en remplaçant $D$ par $D + d$, soit Δ par Δ + $d$. On a donc :

$$G'_c = \frac{D + d - f_1' - f_2'}{4f_1'f_2'}$$

A.N. $G'_c = 95$.

**4.** On déplace maintenant l'ensemble objectif-oculaire par rapport à l'objet pour rétablir la mise au point. Notons $O'_1$ la nouvelle position de l'objectif permettant la mise au point (l'ancienne position est $O_1$) et $\delta = \overline{O_1O'_1}$. Si $\delta < 0$, l'ensemble a été rapproché de l'objet, si $\delta > 0$, l'ensemble a été éloigné. $A'_1$ image de A à travers l'objectif doit être au foyer objet de $L_2$ (l'observation se fait sans accommoder, comme l'explique l'introduction de la solution) soit en $F_2$. Initialement, A a pour image $F_2 = A_1$ à travers $L_1$ :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

Avec $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} = f'_1 + \Delta$, il vient :

$$\overline{O_1A} = \frac{\overline{O_1F_2}\,f'_1}{f'_1 - \overline{O_1F_2}} = -\frac{(f'_1 + \Delta)f'_1}{\Delta}$$

On a éloigné l'oculaire de l'objectif, c'est-à-dire que la distance $F_1'F_2$ a augmenté : on a maintenant $\overline{F'_1F_2} = d + \Delta$. Les points A et $A'_1$ sont conjugués ; on a :

$$\frac{1}{\overline{O'_1A'_1}} - \frac{1}{\overline{O'_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

Avec $\overline{O'_1A'_1} = \overline{O'_1F_2} = \overline{O'_1F'_1} + \overline{F'_1F'_2} = f'_1 + \Delta + d$, il vient :

$$\overline{O'_1A} = -\frac{(f'_1 + \Delta + d)f'_1}{\Delta + d}$$

On a donc :

$$\delta = \overline{O_1O'_1} = \overline{O_1A} - \overline{O'_1A} = -\frac{(f'_1 + \Delta)f'_1}{\Delta} + \frac{(f'_1 + \Delta + d)f'_1}{\Delta + d}$$

$$\delta = -\frac{df'^2_1}{\Delta(\Delta + d)}$$

A.N. $\delta = -0{,}585$ mm. $\delta < 0$, on a donc rapproché le système de l'objet.

**5.** Lorsqu'on tourne la vis micrométrique d'un tour, le système se déplace d'une distance $p$ qui correspond au pas de la vis. Il faut tourner la vis de 2 tours et demi pour que le système se déplace de $\delta$, on a donc :

$$2{,}5\,p = |\delta|$$

soit :

$$p = \frac{|\delta|}{2{,}5}$$

Avec la valeur de $\delta$ précédemment déterminée, on obtient finalement :

$$p = 0{,}234 \text{ mm.}$$

**6.** L'objet A étant au contact de la lame de verre, tout se passe comme si l'objet pour le microscope était $A_v$ tel que $A \xrightarrow{\text{lame de verre}} A_v$, tel que $\overline{AA_V} = e\left(1-\frac{1}{n}\right)$ (c'est la distance entre un objet, accolé à une lame, et son image à travers la lame). Pour effectuer à nouveau la mise au point, il faut déplacer le système de $L = \overline{AA_V}$. Ceci est obtenu avec 0,72 tour, c'est-à-dire $L = 0{,}72\ p$.

$$L = 0{,}72\ p = e\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$n = \frac{1}{1-\frac{0{,}72p}{e}}$$

A.N. $n$ =1,51.

## Exercice 2 Puissance et grossissement d'un microscope

Un microscope est constitué d'un objectif qui forme une image agrandie de l'objet observé et d'un oculaire utilisé par l'œil comme une loupe. On considère un microscope dont les caractéristiques sont les suivantes : distance focale de l'objectif $f'_1$ = 10 mm, distance focale de l'oculaire $f'_2$ = 30 mm, distance entre le point focal image de l'objectif et le point focal objet de l'oculaire $L$ = 15 cm. On suppose que le microscope est réglé pour une vision sans accommodation.

**1. Calculer la puissance intrinsèque et le grossissement commercial de ce microscope.**

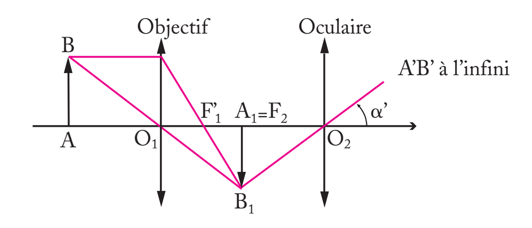
**2. Quelle est la distance de l'objet à l'objectif ?**

**3. Dans ces conditions, calculer le grandissement de l'objectif, la puissance et le grossissement de l'oculaire. Retrouver la puissance et le grossissement calculés en 1.**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice est, dans l'esprit, identique au précédent.**

**1.** $\overline{F'_1F_2} = L$.




**REMARQUE : on n'indique pas de flèches sur les traits rouges qui ne sont pas des rayons mais servent à construire les images successives.**

La puissance intrinsèque $P_i$ du microscope est définie par :

$$P_i = \frac{L}{f'_1 f'_2}$$

A.N. $P_i$ = 500 δ.

Le grossissement commercial est donné par :

$$G_c = \frac{P_i}{4}$$

A.N. $G_c = 125$.

**2.** Le microscope est réglé pour une vision sans accommoder : l'image finale A'B' d'un objet AB est renvoyée à l'infini. On a donc :

$$AB \xrightarrow{\text{Lentille } L_1} A_1B_1 \xrightarrow{\text{Lentille } L_2} \infty$$

L'image intermédiaire $A_1B_1$ est dans le plan focal objet de $L_2$, soit $A_1 = F_2$.
A est l'objet qui donne, à travers $L_1$, l'image $F_2$ :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'}$$

Avec :

$$\overline{O_1F_2} = \overline{O_1F_1} + \overline{F'_1F_2} = f_1' + L$$

on a :

$$\overline{AO_1} = \frac{f_1'\overline{O_1F_2}}{\overline{O_1F_2} - f_1'} = \frac{f_1'(f_1' + L)}{L}$$

A.N. $\overline{AO_1} = 1{,}06$ cm.

**3.** Le grandissement de l'objectif s'écrit :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{OA}}$$

soit :

$$\gamma_1 = \frac{L}{f_1'}$$

A.N. $\gamma_1 = 15$.

La puissance de l'oculaire $P_2$ est définie par :

$$P_2 = \frac{\alpha'}{\overline{A_1B_1}}$$

($\alpha'$ est représentée sur la figure de la question 1.).
Dans le triangle $A_1B_1O_2$, on écrit :

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{f_2'}$$

On a donc finalement :

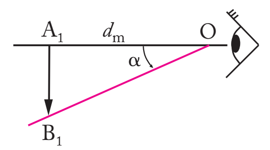
$$P_2 = \frac{1}{f_2'}$$

A.N. $P_2 = 33{,}3\ \delta$.

Le grossissement de l'oculaire est défini par :

$$G_2 = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

où $\alpha$ est l'angle sous lequel on verrait l'objet (pour l'oculaire, l'objet est $A_1B_1$) à l'œil nu, à la distance minimale $d_m$ de vision distincte ($d_m$ = 25 cm).




Dans le triangle $A_1B_1O$, on a :

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{d_m}$$

On a donc finalement :

$$G_2 = \frac{d_m}{f'_2}$$

A.N. $G_2$ = 8,3.

## Exercice 3 Utilisation d'un microscope par un œil normal

Le centre optique d'un œil normal se situe au foyer image de l'oculaire d'un microscope. On met au point le microscope pour que l'œil fasse son observation en accommodation maximale (on rappelle que la distance minimale de vision distincte est $d_m$ = 25 cm). Le microscope a les caractéristiques suivantes : distance focale de l'objectif $f'_1$ = 10 mm, distance focale de l'oculaire $f'_2$ = 30 mm, distance entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire $L$ = 15 cm.

**1. Déterminer la distance de l'objet à l'objectif.**

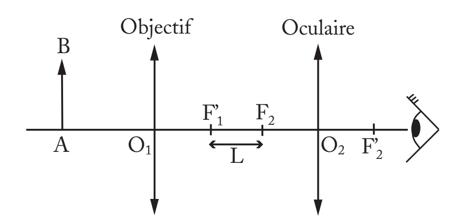
**2. En déduire la latitude de mise au point de ce microscope, définie comme la distance dont on peut faire varier la position de l'objet A de façon à ce que son image A' à travers le microscope appartienne au champ de vision distincte de l'œil.**

**3. Sachant que lorsque l'œil regarde dans un microscope la limite de son pouvoir séparateur est d'environ 4′ (1′ = $3.10^{-4}$ rad), calculer la longueur du plus petit objet transverse visible avec ce microscope.**

### Solution

**CONSEIL : le point de départ de cet exercice est la détermination de la position de l'objet A par rapport au microscope pour que l'œil, situé dans le plan focal image de l'oculaire, voit distinctement l'image A' de cet objet à travers le microscope (association de deux lentilles) lorsqu'il est en accommodation maximale, c'est-à-dire lorsque l'image A' de A se forme à 25 cm de l'œil (au *punctum proximum*).**

**1.**




On cherche la distance $AO_1$ de l'objet à l'objectif telle que l'image finale A'B' soit à la distance $d_m$ (distance minimum de vision distincte) de l'œil placé en $F'_2$. On veut donc :

$$\overline{O_2A'} = \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2A'} = f'_2 - d_m$$

Le schéma synoptique à travers le système formé des deux lentilles s'écrit :

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$$

La position de $A_1$ est donc donnée par la relation de conjugaison de Descartes pour les points ($A_1$ et A') :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

Avec $\overline{O_2A'} = f'_2 - d_m$, on a alors :

$$\overline{O_2A_1} = \frac{\overline{O_2A'}f'_2}{f'_2 - \overline{O_2A'}} = -\frac{(d_m - f'_2)f'_2}{d_m}$$

A.N. $\overline{O_2A_1} = -26{,}4$ mm.

La position de A est alors calculée en utilisant la relation de conjugaison de Descartes pour les points conjugués ($A$, $A_1$) à travers $L_1$ :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

Avec $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} + \overline{F_2O_2} + \overline{O_2A_1} = f'_1 + L + f'_2 - \dfrac{(d_m - f'_2)f'_2}{d_m}$, il vient :

$$\overline{O_1A} = \frac{\overline{O_1A_1}f'_1}{f'_1 - \overline{O_1A_1}}$$

$$\overline{O_1A} = -\frac{(d_m(f'_1 + L) + f'^2_2)f'_1}{d_mL + f'^2_2}$$

A.N. $\overline{O_1A} = -10{,}65$ mm.

**2.** On connaît déjà la position de A telle que A' soit au *punctum proximum* de l'œil ; on effectue le même raisonnement pour déterminer la position de A pour que A' soit au *punctum remotum.* L'œil peut voir distinctement des objets à une distance comprise entre

l'infini et $d_m$. On a déterminé la position A d'un objet qui donne, à travers le microscope une image située à $d_m$ de l'œil. Notons $A_\infty$ la position de l'objet qui donne, à travers le microscope, une image à l'infini. La latitude de mise au point est définie par :

$$\delta = AA_\infty = \left|\overline{O_1A_\infty} - \overline{O_1A}\right|$$

Calculons donc $\overline{O_1A_\infty}$. Le schéma synoptique est le suivant :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} A_{1\infty} \xrightarrow{L_2} \infty$$

L'image de $A_{1\infty}$ à travers $L_2$ se forme à l'infini. $A_{1\infty}$ est donc confondu avec le point focal objet de $L_2$ : $A_{1\infty} = F_2$. Par conséquent, l'image de $A_\infty$ à travers $L_1$ est le point $F_2$ :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1A_\infty}} = \frac{1}{f_1'}$$

Or :

$$\overline{O_1F_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F_2} = f_1' + L$$

On obtient l'expression de $\overline{O_1A_\infty}$ :

$$\overline{O_1A_\infty} = \frac{f_1'\overline{O_1F_2}}{f_1' - \overline{O_1F_2}} = -\frac{f_1'(f_1' + L)}{L}$$

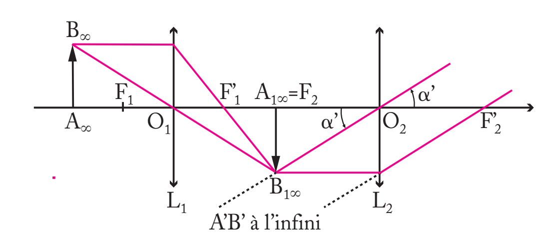
A.N. $\overline{O_1A_\infty} = -10{,}67$ mm.
La latitude de mise au point s'écrit finalement :

$$\delta = \frac{f_1'(f_1' + L)}{L} - \frac{(d_m(f_1' + L) + f_2'^2)f_1'}{d_m L + f_2'^2}$$

$$\delta = \frac{f_1'^2 f_2'^2}{L(Ld_m + f_2'^2)}$$

**A.N.** $\delta = 15{,}625.10^{-6}$ m $= 15{,}625$ µm.

**3.** La puissance du microscope est donnée par $P = \dfrac{\alpha'}{A_\infty B_\infty}$, où $\alpha'$ est l'angle sous lequel est vue l'image de AB lorsque le microscope est réglé pour une vision sans accommodation.



**REMARQUE : on n'indique pas de flèches sur les traits rouges qui ne sont pas des rayons mais servent à construire les images successives.**

Dans le triangle $O_2A_{1\infty}B_{1\infty}$, on a :

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{A_{1\infty}B_{1\infty}}}{f'_2}$$

La puissance du microscope s'écrit donc :

$$P = \frac{1}{f'_2}\frac{\overline{A_{1\infty}B_{1\infty}}}{\overline{A_\infty B_\infty}} = \frac{1}{f'_2}\frac{\overline{O_1A_{1\infty}}}{\overline{O_1A_\infty}}$$

$$P = \frac{L}{f'_1f'_2}$$

A.N. $P = 500\ \delta$. On veut $\alpha' > \alpha_{min} = 1{,}2.10^{-3}$ rad, soit :

$$AB > \frac{\alpha_{min}}{P}$$

A.N. AB > 2,4 µm. Un objet ne sera vu que si sa taille est supérieure à 2,4 µm.

## Exercice 4 Utilisation d'un microscope par un œil myope

Un microscope, de puissance commerciale égale à 1200 δ, est constitué d'un objectif $L_1$ de distance focale inconnue $f'_1$ et d'un oculaire $L_2$ de distance focale $f'_2 = 30$ mm. La distance entre les centres optiques des deux lentilles, notée $e$, vaut 210 mm. Un utilisateur place son œil au foyer image de l'oculaire.

**1. Calculer la distance focale $f'_1$ de l'objectif.**

**2. Dans quel intervalle doit-on placer l'objet pour qu'il soit vu distinctement à travers le microscope par un utilisateur myope dont les deux limites de vision distincte sont 40 cm et 18 cm ?**

**3. Calculer la latitude de mise au point du microscope.**

### Solution

**CONSEIL : dans l'esprit, cet exercice est identique au précédent mais l'utilisateur du microscope étant myope, son champ de vision distincte défini par les positions de son *punctum proximum* et *punctum remotum* est différent.**

**1.** La puissance commerciale du microscope $P_i$ est définie par :

$$P_i = \frac{\Delta}{f'_1f'_2}$$

avec $\Delta = \overline{F'_1F_2} = \overline{F'_1O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f'_1 + e - f'_2$. On en déduit la valeur de $f'_1$ :

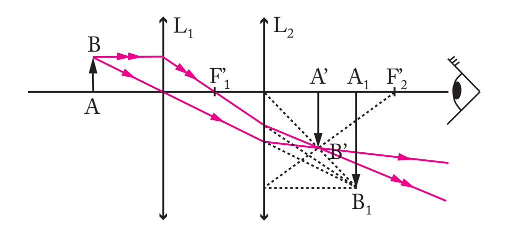
$$f'_1 = \frac{e - f'_2}{1 + P_if'_2}$$

A.N. $f'_1 = 4{,}865$ mm.

**2.** Il faut placer l'objet A pour que son image A' à travers le microscope se forme dans le champ de vision distincte de l'utilisateur myope [$d_P$ = 18 cm, $d_R$ = 40 cm]. L'œil de l'utilisateur étant placé au point focal image $F_2$' de l'oculaire, l'image A' doit se situer à la distance $d$ de $F_2$' telle que :

$$d_P \leq d \leq d_R$$

$$\overline{A'_P F'_2} \leq \overline{A'F'_2} \leq \overline{A'_R F'_2}$$




Le schéma synoptique entre A et son image finale A' s'écrit :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$$

avec :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

On cherche à déterminer la position de A, connaissant celle de A'. On détermine d'abord la position de $A_1$, objet pour l'image A' à travers l'oculaire. On a donc :

$$\overline{O_2A_1} = \frac{f'_2\ \overline{O_2A'}}{f'_2 - \overline{O_2A'}} = \frac{f'_2\ (\overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2A'})}{f'_2 - (\overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2A'})} = \frac{f'_2(f'_2 - d)}{d}$$

On en déduit la position de l'objet A pour cette image $A_1$ à travers l'objectif :

$$\overline{O_1A} = \frac{f'_1\ \overline{O_1A_1}}{f'_1 - \overline{O_1A_1}} = \frac{f'_1\ (\overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1})}{f'_1 - (\overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1})} = \frac{f'_1\left(e + \dfrac{f'_2(f'_2 - d)}{d}\right)}{f'_1 - \left(e + \dfrac{f'_2(f'_2 - d)}{d}\right)}$$

On a finalement :

$$\overline{O_1A} = \frac{f'_1\left(d(e - f'_2) + f'^2_2\right)}{d(f'_1 + f'_2 - e) - f'^2_2}$$

La distance $AO_1$ est donc comprise entre :

$$\frac{f'_1\left(d_P(e - f'_2) + f'^2_2\right)}{d_P(e - f'_1 - f'_2) + f'^2_2} \quad \text{et} \quad \frac{f'_1\left(d_R(e - f'_2) + f'^2_2\right)}{d_R(e - f'_1 - f'_2) + f'^2_2}$$

L'application numérique donne :

$$4{,}996 \text{ mm} \leq \overline{AO_1} \leq 4{,}998 \text{ mm}.$$

**3.** La latitude de mise au point est définie par :

$$\delta = \overline{A_RO_1} - \overline{A_PO_1} = \frac{f'_1(d_R(e-f'_2)+f'^2_2)}{d_R(e-f'_1-f'_2)+f'^2_2} - \frac{f'_1(d_P(e-f'_2)+f'^2_2)}{d_P(e-f'_1-f'_2)+f'^2_2}$$

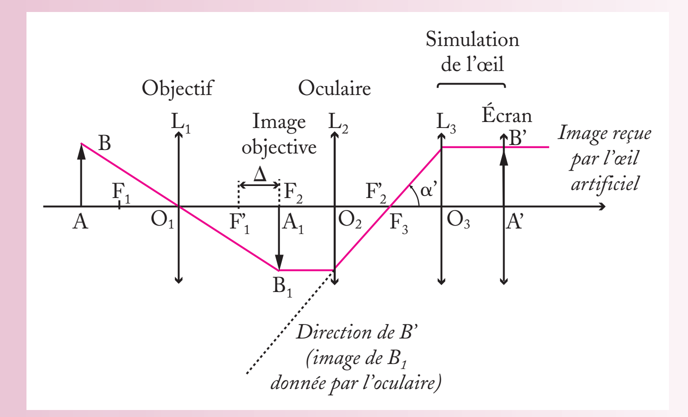
Soit

$$\delta = \frac{f'^2_1 f'^2_2 (d_R - d_P)}{[d_R(e-f'_1-f'_2)+f'^2_2][d_P(e-f'_1-f'_2)+f'^2_2]}$$

A.N. $\delta = 2$ µm.

## Exercice 5 Détermination expérimentale des caractéristiques d'un microscope

Un microscope est constitué d'un système de deux lentilles minces convergentes, de distances focales $f'_1 = 10$ cm pour l'objectif et $f'_2 = 20$ cm pour l'oculaire (les distances focales sont données avec une tolérance de 10 %). L'œil de l'observateur est simulé par une lentille de vergence $C_3 = 3$ δ associée à un écran.
L'objectif est placé près de l'objet AB à examiner. L'image A'B' obtenue sur l'écran correspond à une vision de l'œil sans accommodation (vision à l'infini).




On fait varier l'intervalle optique $\Delta = F'_1F_2$ en déplaçant l'objectif par rapport à l'objet. Pour chaque position de AB, on détermine celle de son image $A_1B_1$ donnée par l'objectif, et l'on place l'oculaire de sorte que son plan focal objet coïncide avec $A_1B_1$ ($F_2$ confondu avec $A_1$). Le microscope donne alors une image virtuelle à l'infini, et vue, du foyer image $F'_2$ de l'oculaire, sous l'angle α' (α' est appelé diamètre apparent de l'image). On fait coïncider le foyer objet $F_3$ de la lentille simulant l'œil avec le foyer image $F'_2$ de l'oculaire. On obtient sur l'écran, une image réelle A''B'' droite, de grandeur indépendante

de la position de l'écran (donc de la profondeur de l'œil). Les différents réglages effectués sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

Tableau récapitulatif : $f'_1$ = 10 cm $f'_2$ = 20 cm $f'_3$ = 33,3 cm

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **$AO_1$ (cm)** | 13,5 | 14,5 | 15 | 16 | 18 | 20 |
| **$O_1A_1$ (cm)** | 40 | 32,6 | 30 | 26,9 | 22,6 | 20 |
| **$\gamma_1 = O_1A_1/AO_1$** | | | | | | |
| **$\Delta = O_1A_1 - f'_1$ (cm)** | | | | | | |
| **A'B' (cm)** | 3 | 2,3 | 2 | 2,3 | 2,1 | 1,8 |
| **$\alpha' = A'B'/f'_3$(rad)** | | | | | | |
| **AB (cm)** | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,0 |
| **$P = \alpha'/AB$ ($\delta$)** | | | | | | |

**1. Compléter le tableau et représenter la variation de la puissance intrinsèque du microscope $P_i$ en fonction de l'intervalle optique $\Delta$.**

**2. En déduire une expression de la puissance d'un microscope en fonction des vergences $C_1$ et $C_2$ des lentilles $L_1$ et $L_2$.**

**3. Représenter la variation du grandissement de l'objectif $\gamma_1$ en fonction de $\Delta$.**

**4. En déduire une expression du grandissement de l'objectif d'un microscope en fonction de $C_1$, vergence de $L_1$.**

## Solution

**1.** On complète le tableau à partir des mesures expérimentales fournies.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **$AO_1$ (cm)** | 13,5 | 14,5 | 15 | 16 | 18 | 20 |
| **$O_1A_1$ (cm)** | 40 | 32,6 | 30 | 26,9 | 22,6 | 20 |
| **$\gamma_1 = O_1A_1/AO_1$** | 2,96 | 2,25 | | 1,68 | 1,26 | 1 |
| **$\Delta = O_1A_1 - f'_1$(cm)** | 30 | 22,6 | 20 | 16,9 | 12,6 | 10 |
| **A'B' (cm)** | 3 | 2,3 | 2 | 2,3 | 2.1 | 1.8 |
| **$\alpha' = A'B'/f'_3$ (rad)** | 0,09 | 0,069 | 0,06 | 0,069 | 0,063 | 0,054 |
| **AB (cm)** | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,0 |
| **$P = \alpha'/AB$ ($\delta$)** | 15 | 11,5 | 10 | 8,625 | 6,3 | 5,4 |

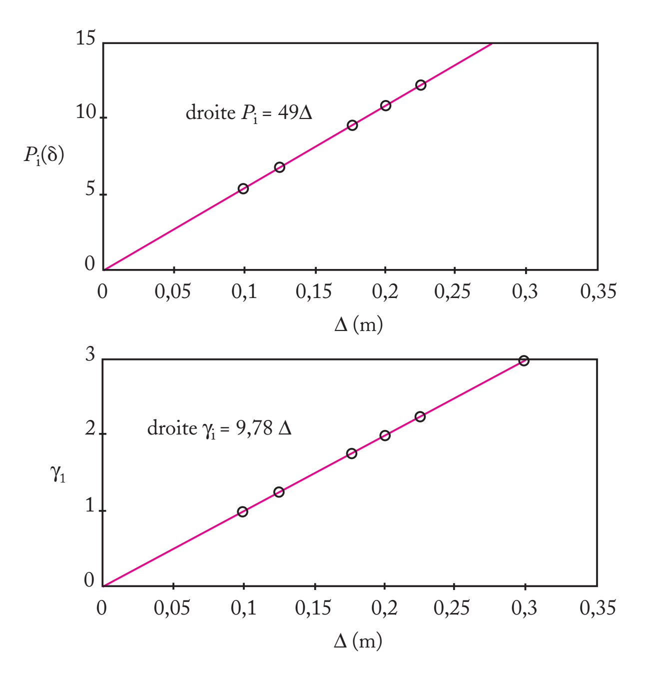
**2.** D'après le graphe 1 de la figure ci-dessous, la puissance du microscope est donnée par :

$$P_i(\delta) = 49\ \Delta(\text{m})$$

Nous avons $C_1 = 10\ \delta$ et $C_2 = 5\ \delta$, d'où l'expression conjecturée de $P_i$ en fonction de $C_1$ et $C_2$ :

$$P_i = C_1 C_2\ \Delta$$

Le produit des vergences de chaque lentille du système par l'intervalle optique correspond à la puissance intrinsèque du microscope.




**3.** D'après le graphe 2 de la figure ci-dessus le grandissement de l'objectif est proportionnel à l'intervalle optique :

$$\gamma_1 = 9{,}78\ \Delta(\text{m})$$

De plus, en prenant en compte la tolérance de 10 % sur la vergence $C_1$ de la lentille $L_1$, égale à 10 δ, on peut conjecturer l'expression suivante :

$$\gamma_1 = C_1.\Delta$$

**4.** On peut exprimer la puissance intrinsèque du microscope en fonction de $\gamma_1$ et de $C_2$. Avec $C_1 = \frac{\gamma_1}{\Delta}$ et $P_i = C_1 C_2 \Delta$, on obtient finalement :

$$P_i = \gamma_1.C_2$$

**5.** La puissance intrinsèque d'un microscope est égale au produit de la puissance de son oculaire (en dioptrie) par le grandissement de son objectif.

# Lunette astronomique

## Exercice 6 Lunette de Galilée

Une lunette est constituée d'un objectif et d'un oculaire sur le même axe optique. L'objectif est une lentille mince convergente $L_1$ de distance focale $f'_1$ = 20 cm et de centre optique $O_1$, l'oculaire est une lentille mince divergente $L_2$ de distance focale $f'_2$ = - 5 cm et de centre optique $O_2$.

**1. Comment faut-il positionner les lentilles pour permettre une vision sans accommodation à travers la lunette ? On rappelle qu'une lunette permet de visualiser des objets très éloignés.**

**2. Schématiser le système et montrer qu'il est afocal.**

**3. Montrer que l'image obtenue est droite. Calculer le grossissement de la lunette.**

## Solution

**CONSEIL : le principe d'une lunette est identique à celui d'un microscope : une première lentille (l'objectif) forme de l'objet A étudié une image intermédiaire $A_1$ qui sert d'objet à une seconde lentille (l'oculaire) qui en donne une image A', image définitive de l'objet A à travers la lunette. C'est cette image A' qui est vue par l'observateur munie de sa lunette.**

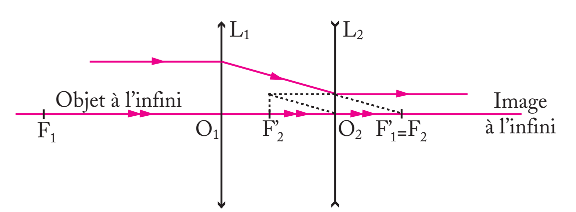
**1.** Une lunette sert à voir des objets situés à l'infini. Pour permettre une vision sans accommoder, il faut que l'image définitive à travers le système optique se forme à l'infini : cette image devient en effet un objet à l'infini pour l'œil, qui le voit alors sans accommoder. Suivons le schéma synoptique d'un point A à l'infini formant son image à travers ($L_1$, $L_2$) en A' à l'infini. A forme son image $A_1$ à travers $L_1$ au point focal image $F_1'$ de $L_1$. Par ailleurs, pour que l'image A' de $A_1$ à travers $L_2$ soit renvoyée à l'infini, il faut que $A_1$ se situe au point focal objet $F_2$ de $L_2$. On en déduit que le réglage souhaité est obtenu si $F_1' = F_2$. On doit donc positionner les lentilles à une distance $D$ telle que :

$$D = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} + \overline{F_2O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2}$$

$$D = f_1' + f_2'$$

A.N. $D = 15$ cm.

**2.** Le système est afocal par définition puisqu'il forme l'image d'un objet à l'infini.




**3.** Le grossissement $G$ de la lunette est défini par :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

α est obtenu dans le triangle $F_1O_1O_1'$ :

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\overline{O'_1O_1}}{\overline{F_1O_1}} = \frac{\overline{O'_1O_1}}{f_1'}$$

α' est obtenu dans le triangle $F_2'O_2O_2'$ :

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{O'_2O_2}}{\overline{F'_2O_2}} = -\frac{\overline{O'_2O_2}}{f'_2}$$

Avec, par construction, $\overline{O_1O'_1} = \overline{O_2O'_2}$, on a :

$$G = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

A.N. $G = 4$. Avec $G > 0$, on conclut que l'image est droite.

## Exercice 7 Grandissement d'une lunette de Galilée

Une lunette est constituée d'un objectif, assimilable à une lentille convergente $L_1$ de distance focale 50 cm et d'un oculaire assimilable à une lentille divergente $L_2$ de distance focale – 5 cm. La lunette est réglée pour que l'observation se fasse sans accommoder.

**1. Comment obtenir ce réglage ?**

**2.a. Calculer le grandissement angulaire obtenu.**

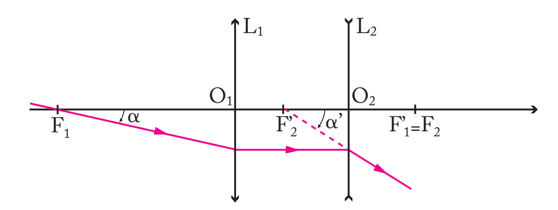
**b. Sous quel angle voit-on une tour de 10 m de haut placée à 2 km ?**

### Solution

**CONSEIL : cet exercice est, dans l'esprit, identique au précédent.**

**1.** Une lunette est construite pour observer des objets situés à l'infini. Soit AB un tel objet ($\overline{O_1A} = -\infty$). Son image A'B' à travers l'objectif se forment donc dans le plan focal image : $A' = F'_1$. Si on règle la lunette pour une observation sans accommodation, l'image finale A''B'' est renvoyée à l'infini. Or A'' est l'image de A' à travers l'oculaire $L_2$. Si A'' est renvoyée à l'infini, A' est donc au foyer objet de $L_2$, c'est-à-dire $A' = F_2$.
Pour obtenir ce réglage, il faut donc que le foyer image de $L_1$ soit confondu avec le foyer objet de $L_2$ : $F'_1 = F_2$.

**2.a.** Soit α l'angle sous lequel est vu AB et α' l'angle sous lequel est vue l'image finale A''B''.




Dans le triangle $O_1O'_1F_1$, on a :

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\overline{O'_1O_1}}{\overline{F_1O_1}} = \frac{\overline{O'_1O_1}}{f'_1}$$

Dans le triangle $AO_1F_2$, on a :

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{O'_2O_2}}{\overline{F'_2O_2}} = -\frac{\overline{O'_2O_2}}{f'_2}$$

On a :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx -\frac{f'_1}{f'_2}$$

A.N. $G = 10$.

**b.** Pour une tour de 10 m de haut située à 2 km, on a $\alpha = \frac{10}{2.10^3} = 5.10^{-3}$ rad.

On obtient donc $\alpha' = 5.10^2$ rad.

## Exercice 8 La lunette de Kepler

Une lunette de Kepler est formée d'un objectif assimilable à une lentille mince convergente de distance focale image $f'_1 = 60$ cm et d'un oculaire assimilable à une lentille mince convergente $L_2$ de focale $f'_2 = 5$ cm. La lunette est réglée à l'infini pour observer des objets ponctuels.

**1. Comment positionner $L_1$ par rapport à $L_2$ ?**

**2. Représenter la marche des rayons lumineux issus d'un point objet situé à l'infini.**

**3.a. Déterminer le grossissement *G* de cet instrument.**

**b. Sous quel angle voit-on un objet AB de 10 m de hauteur située à une distance de 1 km de la lunette ?**

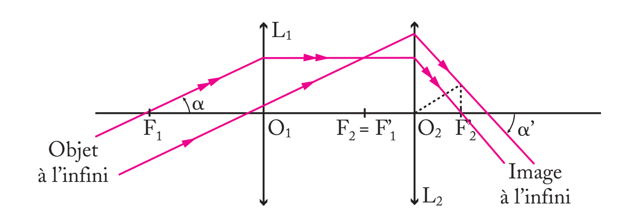
**c. L'observateur utilise la lunette en inversant les lentilles sans modifier son réglage ; il vise l'objet AB à travers la lunette retournée. Sous quel angle apparaît-il ?**

### Solution

**CONSEIL : toujours dans le même esprit que les deux exercices précédents, précisons qu'une lunette est « réglée à l'infini » lorsqu'elle forme une image définitive renvoyée à l'infini ; autrement dit, la lunette est réglée pour permettre à un œil emmétrope une vision sans accommodation.**

**1.** On fait correspondre le plan focal image de $L_1$ avec le plan focal objet de $L_2$, on parle alors de système afocal. La distance qui sépare les deux lentilles est de $D = 65$ cm.

**2.**



**3.a.** Le grossissement correspond au rapport de focales (voir exercice 7) :

$$G = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

A.N. $G = -12$.

**b.** L'objet AB est vu sous un angle $\alpha \approx \frac{AB}{O_1A} = 0{,}01$ rad. En utilisant la lunette astronomique, on voit A'B' sous l'angle $\alpha' = |G|\,\alpha = 0{,}12$ rad.

**c.** Si on inverse l'instrument, le nouveau grossissement s'écrit $G' = \frac{1}{G}$. L'objet est vu avec un angle $\alpha'' = |G'|\,\alpha = 8{,}3.10^{-4}$ rad.

## Exercice 9 La grande lunette de l'observatoire de Meudon

On représente la grande lunette de l'observatoire de Meudon (troisième plus grande lunette du monde par la taille de son objectif) par deux lentilles minces convergentes : l'objectif $L_1$ de centre optique $O_1$ de grande focale $f'_1 = 16$ m et l'oculaire de centre optique $O_2$ et de différentes distances focales courtes : $f'_2 = 4$ cm ou 10 cm ou 16 cm. Le diamètre de $L_1$ vaut $D = 64$ cm.

**1. Schématiser cette lunette astronomique réglée pour une vision sans accommodation, lorsque la lumière provient de l'infini.**

**2. Quels sont ces différents grossissements possibles ?**

**3. Quel est l'intérêt pour l'astronome d'avoir plusieurs oculaires de focale différente ?**

**4. Situer le cercle oculaire et calculer son diamètre.**

**5. Pourquoi aujourd'hui ne fabrique-t-on plus de grande lunette astronomique ?**

### Solution

**1.** On peut reprendre le schéma de l'exercice 8.

**2.** Les différents grossissements sont :

$$G_1 = \frac{f_1'}{f'_{21}} = 400.$$

$$G_2 = \frac{f_1'}{f'_{22}} = 160.$$

$$G_3 = \frac{f_1'}{f'_{23}} = 100.$$

**3.** Un astronome commence toujours ses observations en utilisant un grossissement faible, certaines lunettes astronomiques possèdent même un viseur placé parallèlement à la lunette permettant de garder un champ de visée assez large pour trouver facilement l'objet à observer. Plus le grossissement est important, plus le champ de visée se restreint.

**4.** Calculons le diamètre du cercle oculaire pour une distance focale $f'_2 = 4$ cm. Le cercle oculaire est l'image de l'objectif donnée par l'oculaire.

Sachant que $G = \dfrac{D}{d}$, on a $d = \dfrac{D}{G_1} = 1{,}6$ mm.

**5.** On ne fabrique plus de grande lunette car les lentilles de l'objectif ont été remplacées par des miroirs concaves de grand diamètre moins chers, plus fiables (peu de déformation) et plus maniables.

## Exercice 10 Lunette astronomique et lunette terrestre

Une lunette astronomique est constituée d'un objectif ($L_1$) de distance focale $f'_1 = 60$ cm et d'un oculaire ($L_2$) de faible distance focale $f'_2 = 2$ cm.

**1. Quelle est la particularité de l'image formée ?**

**2. Calculer le grossissement puis la position par rapport à $O_1$ ainsi que le diamètre du cercle oculaire sachant que la monture de l'objectif a un diamètre de 10 cm.**

**3. Quel est l'intérêt d'avoir un cercle oculaire de cette taille ? On donne le diamètre d'ouverture maximal de la pupille ($D'$ = 8 mm quand la pupille de l'œil se trouve au maximum de sa dilatation)**

On utilise la lunette pour observer des objets terrestres : on conserve l'objectif mais on remplace l'oculaire précédent par un oculaire constitué d'une lentille divergente.

**4. Quelle nouvelle image observe-t-on comparée à la précédente ?**

**5. Quelle doit être la distance focale du nouvel oculaire pour que la lunette terrestre permette à l'œil de distinguer deux points voisins, séparés l'un de l'autre d'une distance de 10 cm et situés à 1000 m de l'instrument ? La limite de résolution angulaire imposée par l'œil est $\theta = 4{,}8.10^{-4}$ rad.**

### Solution

**1.** L'objet observé est à l'infini. Les rayons incidents sont parallèles à l'axe optique. Pour que les rayons émergent de la lunette parallèlement à l'axe optique, il faut superposer les foyers image $F'_1$ et objet $F_2$ des deux lentilles convergentes. On parle alors d'un **système optique afocal**. L'image formée avec deux lentilles convergentes est inversée.

**2.** Le grossissement est donné par :

$$G = \frac{f'_1}{f'_2}$$

A.N. $G = 30$.

**3.** La position de l'oculaire par rapport à l'objectif est telle que :

$$D = O_1O_2 = f'_1 + f'_2 = 62 \text{ cm}.$$

Le diamètre du cercle oculaire est donné par :

$$x = \frac{D}{G} = \frac{10}{30} = 3{,}3 \text{ mm}.$$

Le diamètre du cercle oculaire est inférieur au diamètre d'ouverture maximal de la pupille. L'œil reçoit donc toute la lumière transmise par la lunette si la pupille se place dans le plan du cercle oculaire.

**4.** L'image récupérée n'est plus inversée mais droite et agrandie, le grandissement est positif (voir figure de l'exercice 7).

**5.** Pour pouvoir distinguer les deux points distants de 10 cm l'un de l'autre, il faut que :

$$G\alpha = \theta$$

où $\alpha$ représente le diamètre apparent de l'objet que l'on observe.

$$G = \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{\theta}{\alpha}$$

soit :

$$f_1' = \frac{\alpha f_1'}{\theta}$$

Avec $\theta = 4{,}8.10^{-4}$ rad et $\alpha = 0{,}1/1000 = 10^{-4}$ rad, on obtient finalement $f_1' = 12{,}5$ cm. La distance focale de l'oculaire ne doit pas dépasser 12,5 cm.

# Autres instruments optiques

Un peu d'histoire

## La paire de jumelles

Voilà un instrument d'optique que tout le monde connaît. Une paire de jumelles est constituée de deux oculaires, chacun associé à un objectif, l'ensemble étant séparé par plusieurs prismes. Quelles sont les caractéristiques optiques de cet instrument ? Sur chaque appareil, on peut voir inscrits deux nombres associés, comme $8 \times 40$ ou bien $7 \times 50$, qui nous donnent une première indication. La première grandeur correspond au grossissement de l'instrument : un grossissement de 8 équivaut à observer un objet 8 fois plus près. La deuxième grandeur correspond au diamètre de l'objectif en millimètre.
Ces premières indications permettent de comparer deux paires de jumelles entre elles. On utilise plus facilement une paire de jumelles compacte ($6\times35$) pour aller au spectacle alors qu'une paire $10 \times 50$ sera utilisée en randonnée ou pour faire des observations astronomiques. Il faut savoir que plus le grossissement est important plus l'angle de visée va se fermer. Et un champ d'observation faible impose souvent l'utilisation d'un pied ou d'un support de lunettes afin d'obtenir une image la plus stable possible.
Pour des observations nocturnes la taille du cercle oculaire doit correspondre à l'ouverture maximale de la pupille oculaire. La pupille est l'équivalent d'un diaphragme dont le diamètre d'ouverture varie entre 2 mm en plein jour et 8 mm dans l'obscurité. Le cercle oculaire doit donc tendre vers cette valeur de 8 mm pour réaliser des observations de qualité.
Une bonne paire de jumelles est aussi caractérisée par un indice de luminosité $I$. Plus cet indice est grand, meilleure sera la vision surtout si l'on manque un peu de lumière au cours d'observations. On calcule l'indice de luminosité de la manière suivante : $I = (D/G)^2$ où $D$ est le diamètre (en millimètre) de l'objectif et $G$ le grossissement de l'appareil. Ainsi, pour une paire $10 \times 50$, $I = (50/10)^2 = 25$. Au-delà de $I > 20$, on peut considérer que l'observation sera de qualité même sous faible luminosité.
Le prix d'une paire de jumelles dépend de la qualité même de ses optiques. Les prismes, qui redressent l'image inversée par l'objectif, peuvent être traités au fluorure de magnésium pour une meilleure transmission de la lumière. Les autres optiques subissent aussi différents traitements de manière à réduire les pertes en luminosité. Le traitement U.V. reste le plus courant mais d'autres traitements permettent d'améliorer le contraste, de transmettre plus de lumière, et d'éviter bien sûr tout type d'aberration chromatique. Aussi, pour bien choisir une paire de jumelles, faut-il l'essayer dans des conditions limites d'utilisation.

## Exercice 1 Étude d'un viseur

Un viseur sert à déterminer la position d'une image virtuelle formée par un système optique quelconque. Le viseur est constitué d'une lentille mince convergente $L_1$ de distance focale image $f_1' = 10$ cm et d'un écran solidaire de la lentille : la lentille et l'écran sont distants de $d = 15$ cm. La distance entre l'image virtuelle, dont on cherche à déterminer la position, et la lentille $L_1$ est appelée distance frontale.

Un objet réel AB est placé à la distance $|p| = 40$ cm en avant d'une lentille mince L de distance focale image inconnue $f'$. L'image qu'en donne L est repérée à l'aide du viseur : on observe une image nette sur l'écran lorsque la lentille $L_1$ est située à $d_1 = 10$ cm de L.

**1. Calculer la distance focale $f'$ de la lentille L.**

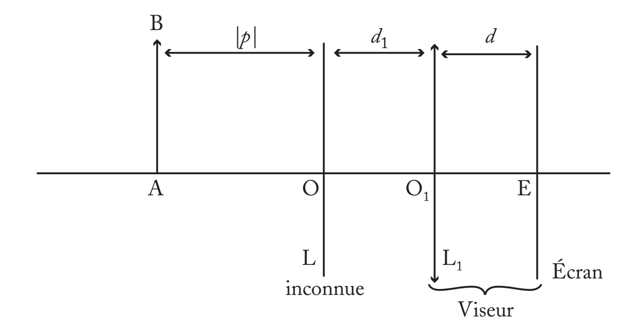
**2. Tracer le trajet des rayons lumineux depuis l'objet jusqu'à l'image définitive.**

### Solution

**CONSEIL : dans cet exercice, le viseur est utilisé pour déterminer la distance focale d'une lentille. Il suffit pour comprendre le principe de la mesure de représenter le schéma synoptique de l'ensemble lentille (de distance focale inconnue)-viseur.**

L'objet A (dont on connaît la position) donne à travers la lentille l'image intermédiaire A' qui sert d'objet pour le viseur et en forme une image A'' sur l'écran d'observation. On connaît donc la position de A et de A'' ; la relation de conjugaison pour le viseur permet de déterminer la position de l'image intermédiaire A'. Les points A et A' étant conjugués pour la lentille dont on cherche à déterminer la distance focale, on peut conclure ! Considérons donc le schéma synoptique suivant :

$$A \xrightarrow{\text{Lentille L}} A' \xrightarrow{\text{Lentille } L_1} A''$$




**1.** Lorsque la distance $OO_1$ est égale à $d_1$, l'image finale A'' de A se forme sur l'écran : $\overline{O_1A''} = \overline{O_1E} = d$. On applique la relation de conjugaison de Descartes au couple (A, A'), conjugué pour L, et à (A', A'') conjugué pour $L_1$ :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{O_1A''}} - \frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f_1'}$$

Avec $\overline{OA} = -p$ et $\overline{O_1A''} = d$, il vient :

$$\overline{OA'} = \frac{pf'}{p-f'} \quad \text{et} \quad \overline{O_1A'} = \frac{df'_1}{f'_1 - d}$$

De plus $\overline{OA'} = \overline{OO_1} + \overline{O_1A'} = d_1 + \overline{O_1A'}$. L'équation sur $f'$ s'écrit donc :

$$\frac{pf'}{p-f'} = d_1 + \frac{df'_1}{f'_1 - d}$$

On obtient finalement l'expression de $f'$:

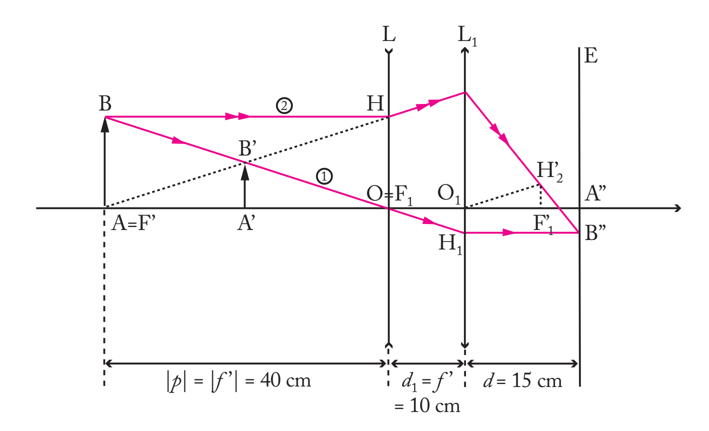
$$f' = \frac{p(d_1(f'_1 - d) + df'_1)}{(f'_1 - d)(p + d_1) + df'_1}$$

A.N. $f' = -40$ cm. La distance focale image est négative donc la lentille L est divergente.

**2.** On peut maintenant compléter le schéma en utilisant les propriétés de deux rayons particuliers :

- le rayon ①, issu de B, passe par le centre optique O de la lentille L : il n'est pas dévié. Il rencontre en $H_1$ la lentille $L_1$. O coïncide avec le point focal objet $F_1$ de $L_1$ : le rayon émerge de $L_1$ parallèlement à l'axe optique ;
- le rayon ②, issu de B parallèle à l'axe optique, rencontre la lentille L en H. Par définition du point focal image F', il émerge de la lentille L suivant la direction F'H. Il rencontre alors la lentille $L_1$ en $H_2$. Pour déterminer la direction d'émergence du rayon après $L_1$, on trace le rayon ②' parallèle à $HH_2$ passant par $O_1$. Ce rayon rencontre le plan focal image de $L_1$ en $H'_2$ : le rayon $HH_2$ émerge de la lentille $L_1$ suivant le direction $H_2H'_2$.

L'intersection des rayons ① et ② se fait sur l'écran au point B''.




## Exercice 2 Téléobjectif

Un téléobjectif est constitué de deux lentilles $L_1$ et $L_2$, de centres respectifs $O_1$ et $O_2$ et de distances focales respectives $f'_1$ et $f'_2$. On décrit ce système comme un doublet 8, 5, – 4 Par conséquent, pour une longueur $a$ de référence, les distances caractéristiques du

système sont : $f'_1 = 8a$, $e = \overline{O_1O_2} = 5a$ et $f'_2 = -4a$. $L_1$ est placée avant $L_2$ pour le sens de propagation de la lumière. Les deux lentilles ont le même rayon $R$.

**1. Où doit-on placer un écran pour y observer l'image d'un objet à l'infini ?**

**2. Quel est alors le diaphragme d'ouverture du téléobjectif ?**

**3. On appelle « champ total objet », pour le réglage à l'infini, l'ensemble des directions dans lesquelles peuvent se trouver des objets dont les images se forment sur l'écran.**

**a. Déterminer les limites de ce « champ total objet ».**

**b. Quel est le rayon du « champ total image » correspondant ?**

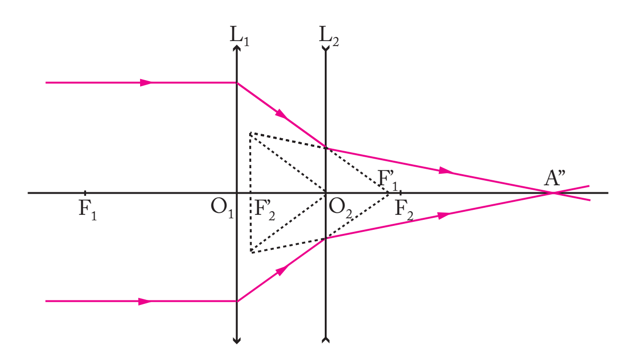
**4. Le « champ de pleine lumière objet » est la partie du « champ total objet » dont l'image formée par le téléobjectif utilise toute la lumière franchissant le diaphragme d'ouverture. Déterminer les limites du « champ de pleine lumière objet ». Quel est le rayon du « champ de pleine lumière image » correspondant ?**

## Solution

**CONSEIL : comme dans l'exercice 1, il faut raisonner sur le schéma synoptique du système. Les raisonnements sur les diaphragmes et les champs totaux seront menés à partir de constructions géométriques des faisceaux entrant et sortant du système.**

Cet exercice est atypique car il aborde (questions 2 à 4) le problème des diaphragmes qui limitent, dans la pratique, l'utilisation des instruments optiques (ici un téléobjectif). Pas de panique cependant car cette notion n'est pas très compliquée. Ici, les deux lentilles ont des diaphragmes de même rayon $R$ : si un rayon arrive sur $L_1$ à une distance de $O_1$ plus grande que $R$, le rayon ne passera pas. Si le rayon arrive sur $L_1$ à une distance de $O_1$ inférieure à $R$, il continue son trajet vers $L_2$. À nouveau se pose la question de savoir si le rayon émergera de $L_2$, c'est-à-dire s'il arrivera sur $L_2$ à une distance de $O_2$ inférieure à $R$. Pour l'étude du champ total objet, on veut qu'une partie des rayons passant $L_1$ émerge également de $L_2$ (en effet, une partie peut émerger de $L_1$ sans passer ensuite $L_2$). Pour l'étude du champ de pleine lumière objet, on veut que tous les rayons passant $L_1$ émergent également de $L_2$. Le champ de pleine lumière objet est donc bien sûr contenu dans le champ total objet. Afin de déterminer ces deux champs, on raisonnera sur le rayon « extrême » qui, ayant passé $L_1$ rencontre $L_2$ au bord du diaphragme, c'est-à-dire à une distance $R$ de $O_2$.

**1.** L'objet A donne, à travers $L_1$, une image intermédiaire A' qui sert d'objet pour la lentille $L_2$. L'image A" de A' à travers $L_2$ est l'image définitive de A à travers le téléobjectif.



Le schéma synoptique du système s'écrit :

$$A \xrightarrow{\text{Lentille L}} A' \xrightarrow{\text{Lentille } L_1} A''$$

L'image A est à l'infini sur l'axe optique, l'image intermédiaire A' se forme au point focal image $F_1$' de la lentille $L_1$. Pour visualiser l'image définitive A'', il faut placer l'écran au point A'', image de $F_1$' à travers la lentille $L_2$. On exprime la relation de conjugaison de Descartes pour les points conjugués ($F_1$', A'') :

$$\frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f_2'}$$

soit

$$\overline{O_2A''} = \frac{\overline{O_1F'_1}\, f_2'}{\overline{O_2F'_1} + f_2'} = \frac{(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1})f_2'}{(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1}) + f_2'}$$

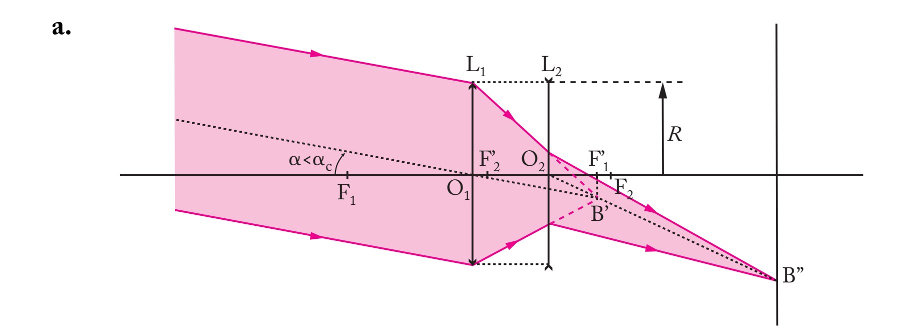
$$\overline{O_2A''} = \frac{(-e + f_1')f_2'}{-e + f_1' + f_2'}$$

A.N. $\overline{O_2A''} = 12\ a$.

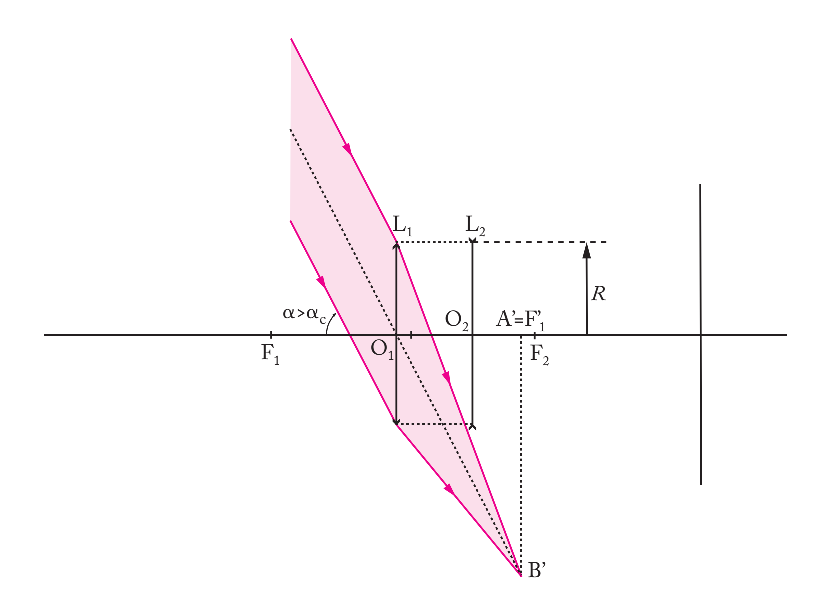
**2.** Toute la lumière qui passe dans $L_1$ passe dans $L_2$ : le diamètre d'ouverture est donc limité par la monture de $L_1$, soit $R$.

**3.a.** Le téléobjectif étant réglé sur l'infini, tout faisceau incident de rayons parallèles, traversant $L_1$ et $L_2$, forme une image sur l'écran (figure a.). Cependant un faisceau incident ne formera pas d'image sur l'écran si, émergeant de $L_1$, il ne rencontre pas la lentille $L_2$. C'est le cas du faisceau représenté figure b. Le cas limite est celui de la figure c. où le rayon extrême supérieur du faisceau émergeant de $L_1$ rencontre le bord inférieur de la lentille $L_2$. Le champ total objet est limité par l'angle $\alpha_c$ de ce faisceau : pour $\alpha \in [-\alpha_c, \alpha_c]$, l'image du faisceau (issu d'un objet à l'infini) forme une image sur l'écran.

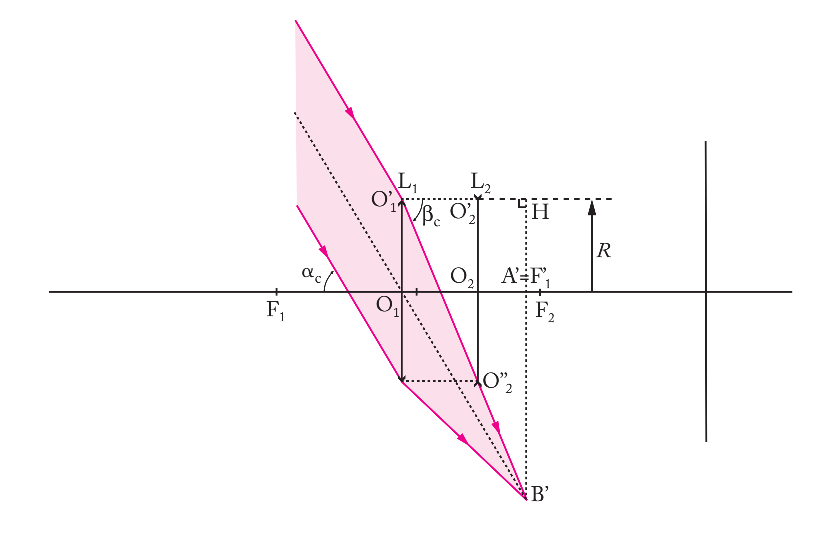
**a.**



**b.**




**c.**




La zone foncée correspond à la partie du faisceau contribuant à former une image B", la zone claire correspond à la partie du faisceau qui ne contribue pas à former une image B" (car elle ne rencontre pas $L_2$).

Déterminons la valeur de $\alpha_c$ (figure c.) :

- dans le triangle $O_1F_1'B'$, on a : $\tan\alpha_c = \dfrac{\overline{A'B'}}{f_1'}$

- dans le triangle $O_1'HB'$, on a : $\tan\beta_c = \dfrac{\overline{A'B'} + R}{f_1'}$ car $\overline{HB'} = R + \overline{A'B'}$

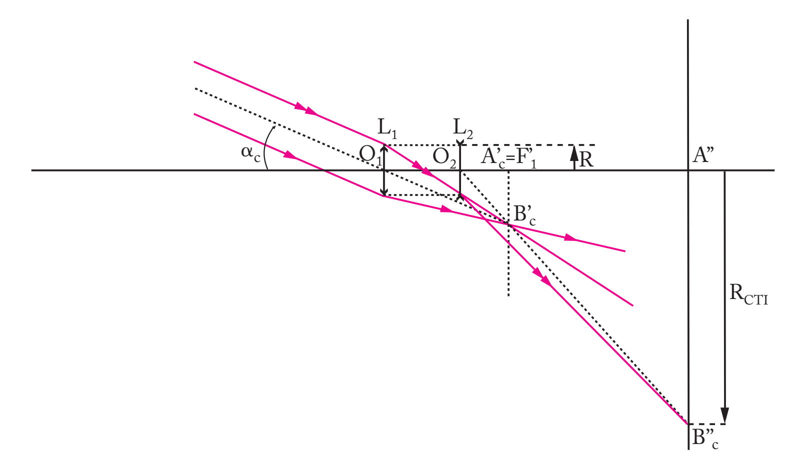
- dans le triangle $O_1'O_2'O_2''$, on a : $\tan\beta_c = \dfrac{2R}{e}$.

Des deux dernières relations, on déduit la valeur de $\overline{A'B'} = f_1'\dfrac{2R}{e} - R$. La valeur de $\alpha_c$ est alors déterminée par :

$$\tan\alpha_c = \frac{R(2f_1' - e)}{f_1' e}$$

A.N. $\tan\alpha_c = \dfrac{11}{40}\dfrac{R}{a}$.

**b.** Le « champ total image » correspondant est limité par $B_c''$, image de B' à travers $L_2$.




On a repris la figure c de la question 3.a. avec une échelle verticale plus réduite de façon à voir B". Comme sur la figure précédente, la zone rose correspond à la partie du faisceau qui ne contribue pas à former l'image B". Dans ce cas limite, seul le rayon extrême (sur le dessin avec des doubles flêches) contribue à l'image B".

Le grandissement de la seconde lentille s'écrit :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A''B_C''}}{\overline{A_C'B_C'}} = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A_C'}} = 4$$

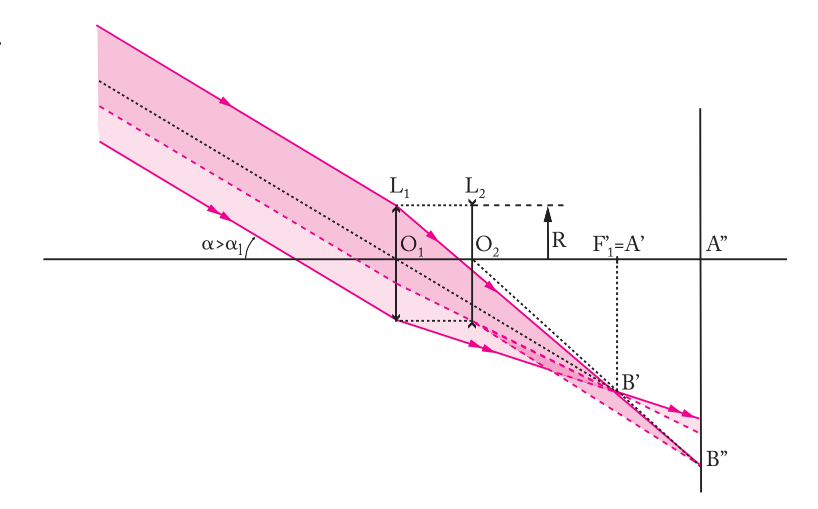
On en déduit le rayon du « champ total image » $R_{CTI}$ :

$$R_{CTI} = A''B_c'' = \gamma_2 A_C'B_C' = \gamma_2 R\left(\frac{2f_1'}{e} - 1\right)$$

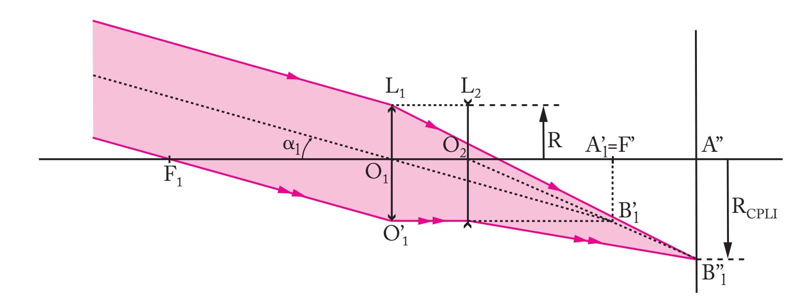
A.N. Avec $\gamma_2 = 4$, on a $R_{CTI} = \dfrac{44}{5}R \approx 8{,}8\,R$.

**4.** Le faisceau appartient au « champ de pleine lumière objet » si tout le faisceau passant dans $L_1$ passe dans $L_2$. Sur la figure a. de la question 3.a., cela est le cas. Considérons les figures ci-dessous. Sur la figure a., une partie du faisceau passant dans $L_1$ ne passe pas dans $L_2$ car le rayon (double flèche) émergeant de $L_1$ ne rencontre pas $L_2$. La figure b. correspond au cas limite où le rayon extrême émergeant de $L_1$ rencontre le bord de la lentille $L_2$ : il faut pour cela que ce rayon émerge de $L_1$ parallèlement à l'axe optique (les deux lentilles ont même rayon). Le rayon incident sur $L_1$ passe donc par $F_1$, point focal objet de $L_1$.

**a.**




**b.**




L'angle $\alpha_1$ correspondant est obtenu en remarquant que, dans le triangle $F_1O_1O'_1$, on a :

$$\tan\alpha_1 = \frac{\overline{O_1O'_1}}{\overline{O_1F_1}} = \frac{R}{f'_1}$$

soit :

$$\tan\alpha_1 = \frac{R}{8a}$$

Le rayon du « champ de pleine lumière image » est donné par $A''B''_1$, avec $A'_1B'_1 = R$ :

$$R_{CPLI} = A''B''_1 = \gamma_2 A'B'_1 = 4R$$

## Exercice 3 Encombrement d'un téléobjectif

À l'aide d'une lentille convergente, de distance focale $f'_1$= 20 cm, on photographie une tour de hauteur $h$ = 30 m, située à une distance de 3 km.

**1. Quelle sera sur le cliché la hauteur $H$ de la tour ?**

**2.a. On place à 15,5 cm en arrière de la première lentille, une lentille divergente, de distance focale $f'_2$ = – 5 cm. L'ensemble constitue un téléobjectif. Quelle est la hauteur $H''$ de la nouvelle image ?**

**b. Quelle est la distance $l$ entre la première lentille et la plaque photographique (encombrement) ?**

**3. Quelle serait la distance focale d'une lentille convergente qui donnerait, à elle seule, une image de même dimension que la précédente ? Quel serait alors l'encombrement ?**

## Solution

**CONSEIL : dans cet exercice, on compare la taille du système (un téléobjectif) formé d'une seule ou de l'association de deux lentilles, le téléobjectif étant utilisé pour photographier une tour (un objet transverse). Dans les deux cas, on calcule la taille de l'image obtenue et l'encombrement de l'appareil.**

**1.** Utilisons la relation de conjugaison de Descartes pour la lentille $L_1$ qui donne d'un objet AB tel que $AB = h = 30$ m et $\overline{O_1A} = -3$ km, une image $A'B' = H$. Nous allons déterminer $H$ :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

Il vient :

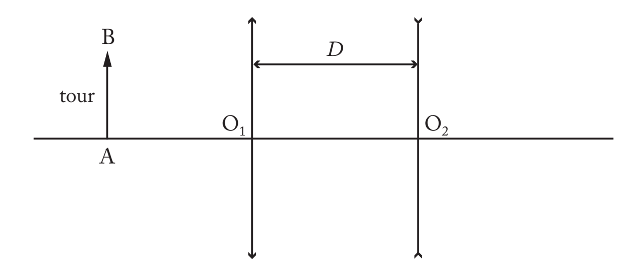
$$\overline{O_1A'} = \frac{\overline{O_1A}\, f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1} \approx f'_1$$

A.N. $\overline{O_1A'} \approx 20$ cm.
Par suite, le grossissement donne :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}}$$

A.N. $\gamma_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-5}$, soit $H = |\gamma_1|\, h = 2$ mm.

**2. a.**




Le schéma synoptique s'écrit :

$$A \xrightarrow{L_2} A' \xrightarrow{L_1} A''$$

L'image A' a été caractérisée à la question précédente : $\overline{O_1A'} \approx f'_1 = 20$ cm, soit $\overline{O_2A'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A'} = -D + f'_1 = 4{,}5$ cm. La loi de conjugaison de Descartes pour l'objet A' et son image A'' à travers la lentille $L_2$ s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f_2'}$$

Il vient :

$$\overline{O_2A''} = \frac{\overline{O_2A'}f'_2}{\overline{O_2A'}+f'_2} = \frac{(f'_1 - D)f'_2}{f'_1 + f'_2 - D}$$

A.N. $\overline{O_2A''} = 45$ cm.
La nouvelle hauteur de la tour est donnée par le grossissement $\gamma_2$ de la lentille $L_2$ :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_1A'}}$$

A.N. $\gamma_2 = 10$, soit $H'' = |\gamma_2|\, H' = |\gamma_1\, \gamma_2|\, H = 2$ cm.
**b.** L'encombrement est donné par la distance de la première lentille $L_1$ à la plaque photographique, où se forme A'',

$$L = \overline{O_1A''} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A''} = D + \frac{(f'_1 - D)f'_2}{f'_1 + f'_2 - D}$$

$$L = \frac{D(f'_1 - D) + f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - D}$$

A.N. $L = 60{,}5$ cm.
**3.** Avec une seule lentille convergente $L_e$ de centre optique O, nous souhaitons obtenir le même grossissement $\gamma = \gamma_1\, \gamma_2 = -6{,}67 \cdot 10^{-4}$. L'encombrement $L'$ correspond alors à la distance entre la lentille et l'image A'' de l'objet A : $L' = $ OA''.

Avec $\gamma = \dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}$, il vient :

$$L' = \gamma\, |\mathrm{OA}| = \gamma\, h$$

A.N. $L' = 2$ mètres ! En conclusion, il vaut mieux utiliser deux lentilles, si on ne veut pas que l'appareil soit trop encombrant !

## Exercice 4 Téléobjectif achromatique

On étudie l'objectif d'un téléobjectif. Cet objectif est constitué d'une lentille convergente de distance focale $f' = 40$ mm. Une pellicule photosensible P est placée derrière la lentille et on effectue la mise au point en déplaçant l'objectif, la pellicule étant fixe.

On appelle tirage de l'appareil $t$ la valeur algébrique $\overline{F'A'}$.

**1. Quelle est la valeur maximale du tirage lorsque l'objectif permet de faire la mise au point sur un objet situé à une distance de l'objectif comprise entre $D_{min} = 1$ m et l'infini.**

Dans la suite de l'exercice, la mise au point est faite sur l'infini. L'objectif est muni d'un diaphragme d'ouverture $n$ réglable dont le rayon $R$ variable suit la relation : $R = \dfrac{f'}{2n}$. La structure de la pellicule étant granulaire, l'image d'un objet ponctuel forme une tache dont le diamètre correspond à la taille d'un grain $a = 25$ µm.

**2.a. Déterminer l'ensemble des positions d'un objet A sur l'axe optique donnant une image aussi nette que l'image d'un point situé à l'infini.**

**b. Pour l'ouverture $n$ = 16, calculer la distance minimale de cet objet au centre optique.**

**On appelle limite de résolution la distance minimale entre deux objets A et B qui donnent des images A′ et B′ distincts sur la pellicule et qui sont tels que A soit sur l'axe optique et B appartienne au plan perpendiculaire à l'axe optique passant par A.**

**3. Donner l'expression de la limite de résolution en fonction de $a$, $f'$ et la mesure algébrique $\overline{AO}$.**

**4. Comment faut-il placer l'objectif par rapport à A pour que la limite de résolution soit la plus faible possible. Faire l'application numérique.**

## Solution

**CONSEIL :** comme le précédent, cet exercice utilise la notion de diaphragme, mais cette fois dans une optique un peu différente. Le téléobjectif est réglé sur l'infini, c'est-à-dire que la pellicule est dans le plan focal de la lentille. Si on vise maintenant un objet A à distance finie, son image A′ se forme derrière la pellicule. Comme la lentille est diaphragmée, un faisceau limité émis par A émerge de la lentille. L'intersection de ce faisceau avec la pellicule forme une tache. L'image de A sur la pellicule sera donc floue, sauf si la résolution de la pellicule (on parle de grain) est supérieure à la taille de cette tache. C'est l'objet de la question 2. Enfin dans les questions 3 et 4, on considère deux taches sur la pellicule, images floues de deux points A et B d'un objet transverse. À nouveau, on dira que les deux taches sont distinctes si leurs centres sont distants de plus d'un grain : cette dimension définit ainsi la limite de résolution de l'instrument.

**1.** Un objet AB à l'infini forme son image dans le plan focal image de la lentille. On a donc A' = F' et le tirage est égal à zéro. Un objet AB situé à une distance $\overline{AO}$ = D de l'objectif forme une image A'B'. A et A' vérifient la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f_2'$$

Le tirage $t$ correspondant s'exprime par :

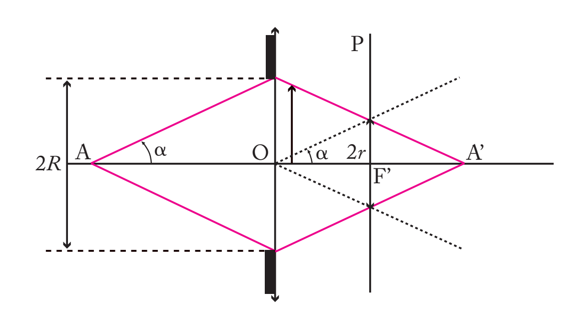
$$t = -\frac{f_2'}{\overline{FA}} = -\frac{f_2'}{\overline{FO} + \overline{OA}} = \frac{f_2'}{D - f_2'}$$

Avec $D_{min} \leq D \leq \infty$, on a :

$$0 \leq t \leq t_{max} = \frac{f'^2}{D_{min} - f'}$$

L'application numérique donne $t_{max}$ = 1,67 mm.

**2.a.**



Un objet à l'infini forme une image ponctuelle sur la pellicule mais la structure granulaire du film en fait une tache de diamètre $a$. Tout objet dont l'« image » sur la pellicule est une tache de diamètre $2r \leq a$ donnera une « image » aussi nette que celle d'un objet à l'infini. Sur la figure ci-dessus, l'angle $\alpha$ permet d'exprimer $r$ en fonction de $R$ et de la distance $\overline{\mathrm{AO}}$ de l'objet à l'objectif :

$$\tan\alpha = \frac{R}{\overline{\mathrm{AO}}} = \frac{r}{f'_1}$$

On a donc

$$r = f'\frac{R}{\overline{\mathrm{AO}}}$$

On cherche $r$ tel que $2r \leq a$ ; la distance de l'objet à la pellicule doit être telle que :

$$\overline{\mathrm{AO}} \geq 2\frac{f'R}{a}$$

**b.** Avec $R = \dfrac{f'}{2n}$, on a pour $n = 16$, $\mathrm{AO} \geq \mathrm{AO}_{\mathrm{min}}$ et $\mathrm{AO}_{\mathrm{min}} = 4$ m.

**3.** Pour que les taches « images » de A et B soient distinctes sur la pellicule, il faut que les deux taches se situent sur des grains différents. Si $\mathrm{A_C}$ et $\mathrm{B_C}$ désignent les centres des taches $\mathrm{A_1A_2}$ pour A et $\mathrm{B_1B_2}$ pour B (voir figures ci-dessous), on a :

$$\mathrm{A_cB_c} \geq a$$

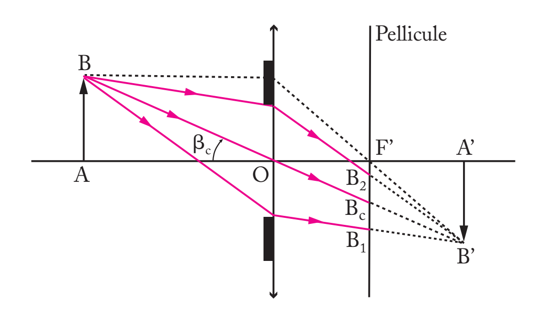
Sur la figure a. ci-dessous, on a :

$$\tan\beta_c = \frac{\mathrm{F'B_c}}{f'} = \frac{\mathrm{A_cB_c}}{f'}$$

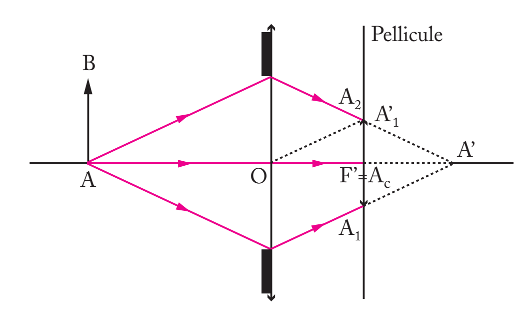
La condition $\mathrm{A_cB_c} \geq a$ se traduit par une condition sur AB :

$$\overline{\mathrm{AB}} \geq \frac{a}{f'}\overline{\mathrm{AO}}$$

**a.** Construction de la tache $\mathrm{B'_1B'_2}$, image de B sur la pellicule.



**b.** Construction de la tache $A_1A_2$, image de A sur la pellicule.




**4.** Pour diminuer la limite de résolution, il faut diminuer OA, à condition que l'image soit réelle. Cette condition est vérifiée si $\overline{AO} \geq f'$.

$$\overline{AB} \geq \frac{a}{f_1'} \overline{AO} \geq a$$

La limite de résolution est donc au minimum égale au grain de la pellicule.

## Exercice 5 L'objectif d'un appareil photo

Il existe des similitudes de fonctionnement entre certains systèmes optiques. Ainsi, on peut établir une analogie entre l'œil et l'appareil photographique.

**1. À partir de la première colonne du tableau, trouver les termes adaptés pour chaque instrument optique.**

| Caractéristique optique | Œil | Appareil photo |
|---|---|---|
| Optique utilisée | | |
| Système d'ouverture | | |
| Partie sensible | | |
| Réglage possible | | |

**L'objectif d'un appareil photo est constitué de l'association de lentilles dont l'ensemble peut former :**

**- une focale courte inférieure à 50 mm ;**

**- une focale $f$ = 50 mm proche de la focale de l'œil humain ;**

**- une focale supérieure à 50 mm, c'est le cas des téléobjectifs ($f'$ = 135mm).**

**À partir de ces trois types d'objectifs, il est possible de mesurer le champ angulaire (appelé aussi champ de netteté ) $\theta$ tel que $\tan\theta = L/2f'$, où $L$ représente la diagonale du format rectangulaire de la pellicule et $f'$ la focale de l'objectif.**

**2. Calculer les champs de netteté pour un objectif $f'_1$ = 35 mm, $f'_2$ = 50 mm, $f'_3$ = 135 mm sachant que la pellicule a un format $24 \times 36$ mm$^2$.**

**3. Que peut-on conclure ?**

**Le nombre d'ouverture *N.O* correspond au rapport entre la focale de l'objectif et son diamètre d'ouverture *D* : *N.O* = *f'*/*D*. Par exemple, pour un objectif *f'* = 35 mm, on obtient le tableau suivant :**

| *N.O* | 2 | 2.4 | 4 | 5.6 | 8 | 11 | 16 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *D (mm)* | 17,5 | 14,6 | 8,7 | 6,2 | 4,4 | 3,2 | 2,2 | 1,6 |

**4. De quel type de série s'agit-il ? Trouver sa raison.**

**5. Avec quel *N.O* vaut-il mieux faire des photos et pour quelles raisons ?**

**Il existe deux types de cellules installés dans les boîtiers d'appareils photo qui fonctionnent, soit en donnant la priorité à la durée d'exposition, soit en donnant la priorité au diaphragme. Ces cellules calculent la grandeur $T / (N.O)^2$ où *T* est le temps d'exposition du film au cours de la prise.**

**6. Sachant que la progression géométrique des *N.O* a une raison de $2^{1/2}$ et que les temps de pose correspondent à une progression de raison 2, compléter le tableau suivant :**

| *N.O* | 2.8 | | | | | | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N.O^2$ | | | | | | | |
| *T* (s) | $10^{-3}$ | | | | | | |

**La norme ISO en vigueur aujourd'hui pour la sensibilité des films remplace l'ancienne norme ASA.**

| ISO | 12 | | | | | | 1600 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

**7. Cette norme correspond à une progression géométrique de raison 2. Compléter le tableau ci-dessus.**

**8. Il existe des films dits « rapides » et des films dits « lents ». Ces caractéristiques dépendent de la taille des grains d'émulsion (microcristaux). Sachant qu'un grain a une taille qui varie de 100 μm à 5 μm, relier ces valeurs à la norme ISO et à la rapidité du film.**

## Solution

**1.**

| Caractéristique optique | Œil | Appareil photo |
|---|---|---|
| Optique utilisée | Cristallin | Objectif |
| Système d'ouverture | Iris | Diaphragme |
| Partie sensible | Rétine | Pellicule |
| Réglage possible | Accomodation | Mise au point |

**2.** Pour un objectif $f_1'$ = 35 mm, $2\theta = 63°$; pour un objectif $f_2'$ = 50 mm, $2\theta = 46°$; pour un objectif $f_3'$ = 135 mm, $2\theta = 18°$.

**3.** Plus la distance focale de l'objectif est courte plus le champ de netteté à tendance à s'ouvrir.

**4.** Il s'agit d'une série géométrique de raison $\sqrt{2}$.

**5.** Pour obtenir des photos de qualité, il vaut mieux utiliser un *N.O* de grande valeur, on évitera ainsi les aberrations géométriques même si le temps de pose augmente !

**6.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***N.O*** | 2.8 | 4 | 5.6 | 8 | 11 | 16 | 22 |
| ***N.O²*** | 7.8 | 16 | 31 | 64 | 121 | 256 | 484 |
| ***T* (s)** | $10^{-3}$ | $2.10^{-3}$ | $4.10^{-3}$ | $8.10^{-3}$ | 1/60 | 1/30 | 1/15 |

Pour un flux de lumière donné, le temps de pose est plus court pour un petit *N.O* c'est-à-dire pour un grand diamètre d'ouverture. Dans ce cas, la profondeur de champ est faible.

Si on augmente le *N.O* on diminue le diamètre d'ouverture mais on augmente le temps de pose et on gagne de la profondeur de champ. Mais attention à la photo floue pour les sujets en mouvements !

**7.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ISO** | 12 | 25 | 50 | 100 | 200 | 400 | 800 | 1600 |

**8.** Un film dit « rapide » n'a pas besoin de beaucoup de lumière en revanche les grains d'émulsion sont de grosse taille (> 50 µm ). Ces films sont souvent en noir et blanc. On considère alors qu'un film est rapide pour une sensibilité supérieure à 400. Un film « lent » aura besoin de plus de lumière pour être impressionné. Cela correspond, dans la norme ISO utilisée, à une sensibilité inférieure à 400 et une taille du grain inférieure à 20 µm.

En conclusion, on peut utiliser trois types d'objectifs, le grand angle, l'objectif de 50 mm et le téléobjectif. Les variables dépendant les unes des autres sont le nombre d'ouverture, le temps de pose et la profondeur de champ. La profondeur de champ augmente lorsque le N.O augmente !

## Exercice 6 Zoom photographique

Un zoom photographique peut être modélisé par l'association de trois lentilles alignées sur un axe optique *xx'*. On note $L_1$ la première lentille, convergente de distance focale $f'_1$ = 20 cm et de centre optique $O_1$, $L_2$ la seconde lentille, divergente de distance focale $f'_2$ = - 4 cm et de centre optique $O_2$ et $L_3$ la troisième lentille, convergente de distance focale $f'_3 = f'_1$ et de centre optique $O_3$. $L_1$ et $L_3$ sont fixes et distantes de $e$ = 15 cm. On note $x$ la distance réglable $O_1O_2$ ($0 \leq x \leq e$).

Un objet AB, A étant sur l'axe optique, donne, à travers le système formé des trois lentilles, une image A'B'. Cette image sera un objet pour l'appareil muni du zoom (autrement dit, A'B' doit être une image virtuelle pour être un objet réel pour l'appareil).

**1. Déterminer la position de l'image A'B' d'un objet AB situé à l'infini. On donnera la valeur de $\overline{O_3A'}$, notée *y*, en fonction de *x*.**

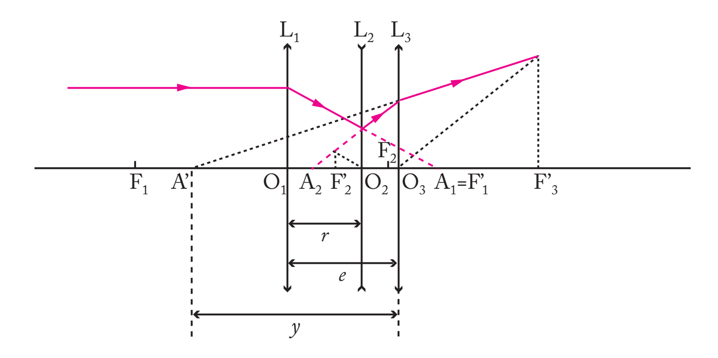
**2.** Montrer que *y* passe par un extremum quand *x* varie entre ses bornes ; on fera les calculs avec les valeurs numériques de $f_1'$, $f_2'$ et *e*.

**3.** Que peut-on dire de la position de l'image au voisinage de l'extremum ? Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

## Solution

**CONSEIL :** l'exercice ne semble pas compliqué à première vue : il s'agit de déterminer la position d'une image à travers trois lentilles. La complication vient du fait que l'une des trois lentilles (celle du milieu) à une position variable entre les deux autres. On ne peut donc pas faire d'application numérique intermédiaire. La difficulté est donc mathématique.

**1.**




Le schéma synoptique donnant l'image A' d'un objet A s'écrit :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \xrightarrow{L_3} A'$$

Un objet A à l'infini forme son image à travers $L_1$ au point focal image de $L_1$ : $A_1 = F_1'$. Déterminons l'image $A_2$ de $F_1'$ à travers $L_2$, puis l'image définitive A' à travers la lentille $L_3$. La relation de conjugaison de Descartes pour les points conjugués $(F_1', A_2)$ pour $L_1$ et $(A_2, A_3)$ pour $L_3$ permet d'écrire :

$$\frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{O_3A'}} - \frac{1}{\overline{O_3A_2}} = \frac{1}{f_3'} = \frac{1}{f_1'}$$

Il vient donc :

$$\overline{O_2A_2} = \frac{\overline{O_2F_1'}\, f_2'}{\overline{O_1F_1'} + f_2'} = \frac{(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1})f_2'}{(\overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1}) + f_2'} = \frac{(f_1' - x)f_2'}{f_1' + f_2' - x}$$

et

$$\overline{O_3A'} = \frac{\overline{O_3A_2}f_1'}{\overline{O_3A_2} + f_1'} = \frac{(\overline{O_3O_2} + \overline{O_2A_2})f_1'}{(\overline{O_3O_2} + \overline{O_2A_2}) + f_1'} = \frac{\left(x - e + \dfrac{(f_1' - x)f_2'}{f_1' + f_2' - x}\right)f_1'}{x - e + \dfrac{(f_1' - x)f_2'}{f_1' + f_2' - x} + f_1'}$$

$$y = \overline{O_3A'} = \frac{[(x-e)(f_1' + f_2' - x) + (f_1' - x)f_2']f_1'}{(x-e+f_1')(f_1' + f_2' - x) + (f_1' - x)f_2'}$$

Finalement, on obtient :

$$y = \frac{x^2 - (f_1' + e)x + e(f_1' + f_2') - f_1'f_2'}{x^2 - ex - (f_1' + f_2')(f_1' - e) - f_1'f_2'} f_1'$$

**2.** L'application numérique donne, avec $f_1' = 20$ cm, $f_2' = -4$ cm et $e = 15$ cm :

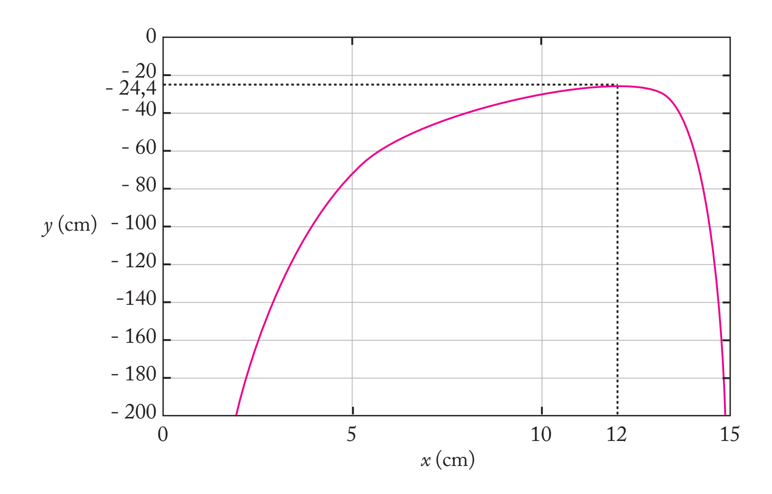
$$y = 20\,\frac{x^2 - 35x + 320}{x^2 - 15x}$$

$y$ passe par un extremum si $y'$ s'annule en changeant de signe :

$$y' = 20\,\frac{(2x-35)(x^2-15x) - (2x-15)(x^2-35x+320)}{(x^2-15x)}$$

$$y' = 20\,\frac{20(x^2 - 32x + 240)}{(x^2-15x)^2}$$

$y' = 0$ si $x$ annule $P(x) = x^2 - 32x + 240$, c'est-à-dire, avec $\Delta(P) = 64$, pour $x \pm \frac{\sqrt{64}}{2} = 20$ cm ou 12 cm. La solution $x = 20$ cm n'est pas acceptable car on doit avoir $0 \leq x \leq 15$ cm ; on retient donc la solution $x = 12$ cm.
On a alors $y$ (12 cm) $= -24{,}4$ cm ; il suffit de faire une application numérique pour $x = 10$ cm (par exemple) pour se convaincre que $x = 12$ cm correspond à un maximum de $y(x)$ : $y$ (10 cm) $= -28$ cm $< y$ (12 cm).




**3.** La position de l'image est repérée par $y$. Par définition d'un extremum, la valeur de $y$, donc la position de l'image, varie peu au voisinage de l'extremum. Lorsqu'on règle la lentille $L_2$ intermédiaire autour de $x = 12$ cm, la mise au point reste raisonnable.

## Exercice 7 Étude simplifiée d'un objectif photographique bifocal

On étudie, de manière simplifiée, le principe d'un objectif photographique présentant deux distances focales images possibles.

L'objectif photographique est un système optique comprenant, sur un même axe optique principal, trois lentilles minces $L_1$, $L_2$ et $L_3$, de centres optiques respectifs $O_1$, $O_2$, $O_3$. $L_1$ et $L_3$ sont des lentilles identiques, divergentes, de distance focale $f'_1 = f'_3 = f' = -60$ mm et $L_2$ est une lentille convergente de distance focale $f'_2 = 35$ mm. Dans la première position (position 1), les lentilles $L_1$ et $L_2$ sont accolées ($\overline{O_1O_2} = 0$).

**1. Déterminer, en fonction de $f'$ et de $f'_2$, la position, par rapport à $O_1$, du foyer image $F'_{12}$ de la lentille mince équivalente à l'ensemble des deux lentilles $L_1$ et $L_2$.**

**2. En déduire la distance $e = \overline{O_1O_3}$ entre les lentilles $L_1$ et $L_3$ pour qu'un objet à l'infini forme à travers le système une image à l'infini. Le système est dit afocal.**

**3. Déterminer, en fonction de $f'$ et $f'_2$, le grandissement, défini comme le rapport $\gamma_1 = D'/D$ du diamètre $D'$ du faisceau émergent sur le diamètre $D$ du faisceau incident parallèle à l'axe optique principal correspondant.**

**4. Montrer que si l'on accole la lentille $L_2$ à la lentille $L_3$, ($L_1$ et $L_3$ restant fixes), on obtient aussi un système afocal (position 2). Déterminer, dans ce cas, le rapport $\gamma_2$ entre des diamètres du faisceau de sortie et du faisceau d'entrée.**

**5. Le système optique est dans la position 1. Construire la marche d'un faisceau lumineux à travers le système, le faisceau incident étant parallèle, incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à l'axe optique. On notera $\alpha'$ l'angle du faisceau émergent par rapport à l'axe optique principal.**

**6. En déduire, en fonction de $f'$ et de $f'_2$, la valeur du rapport $G_1 = \alpha'/\alpha$ des angles de sortie et d'entrée du faisceau ($G_1$ est le grossissement du système afocal). Quelle est la relation entre $G_1$ et $\gamma_1$ ?**

**7. En déduire la valeur, en fonction de $f'_1$ et de $f'_2$, du grossissement $G_2$ du système dans la position 2.**

On dispose, derrière $L_3$, une lentille mince convergente $L_4$ de distance focale $f'_4 = 50$ mm.

**8. Où doit-on placer le film photographique pour obtenir une image nette d'un objet à l'infini ? La distance entre $L_3$ et $L_4$ a-t-elle de l'importance ?**

**9. Où doit-on placer la lentille $L_4$ pour que l'encombrement du système lentilles-film soit le plus faible possible ? Quelle est alors la distance entre $L_1$ et le film photographique ?**

**10. Quelle est la dimension de l'image A'B' sur le film d'un objet AB à l'infini, caractérisé par son diamètre apparent $\alpha$, lorsque:**

**- $L_2$ est accolée à $L_1$,**

**- $L_2$ est accolée à $L_3$.**

**Calculer la taille de l'image A'B', pour les positions 1 et 2 avec $\alpha = 5°$.**

**On appelle distance focale $f'_o$ de l'objectif, composé des lentilles $L_1$, $L_2$, $L_3$, et $L_4$, la longueur égale au rapport de la taille de l'image A'B' et de l'angle $\alpha$ : $f'_o = A'B'/\alpha$.**

**11. Déterminer les valeurs numériques de cette distance focale dans les positions 1 et 2**

## Solution

**CONSEIL : cet exercice est long mais il ne pose pas de difficulté majeure. On se ramène à l'étude de deux lentilles, la lentille $L_2$ étant toujours accolée soit à $L_1$ soit à $L_3$. Laissez-vous guider par l'énoncé.**

**1.** Dans la position 1, les lentilles $L_1$ et $L_2$ sont accolées ($O_1 = O_2$). La distance focale des deux lentilles accolées est égale à :

$$\overline{O_1F'_{12}} = f'_{12} = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2}$$

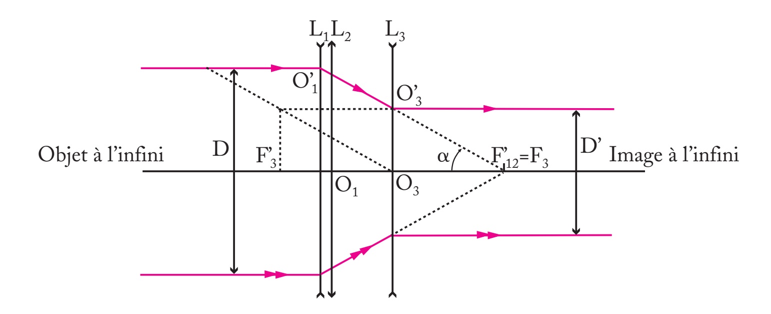
A.N. $f'_{12} = 84$ mm. La lentille équivalente est convergente.

$F'_{12}$ est le point focal image de la lentille équivalente à ($L_1$, $L_2$) accolées ; il est l'image d'un objet à l'infini.

**2.** Pour que le système ($L_1$, $L_2$, $L_3$) soit afocal, il faut que l'image de l'objet réel A à l'infini forme son image à travers le système à l'infini.
Par définition, le point focal objet $F_3$ de la dernière lentille $L_3$ forme son image à travers $L_3$ à l'infini ; il faut donc que l'image intermédiaire $F'_{12}$ de A à travers ($L_1$, $L_2$) soit confondue avec $F_3$. La distance $e$ entre les centres optiques vérifie alors la relation (avec $f'_3 = f'_1$) :

$$e = \overline{O_1O_3} = \overline{O_1F'_{12}} + \overline{F'_{12}O_3} = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2} + f'_1 = f'_1 \frac{f'_1 + 2f'_2}{f'_1 + f'_2}$$

A.N. $e = 24$ mm.




**3.** Le grandissement $\gamma_1$ a pour expression :

$$\gamma_1 = \frac{D'}{D}$$

- Dans le triangle $F'_{12}O_1O_1'$ :

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\overline{O_1O'_1}}{\overline{F'_{12}O_1}} = \frac{D}{2f_{12}}$$

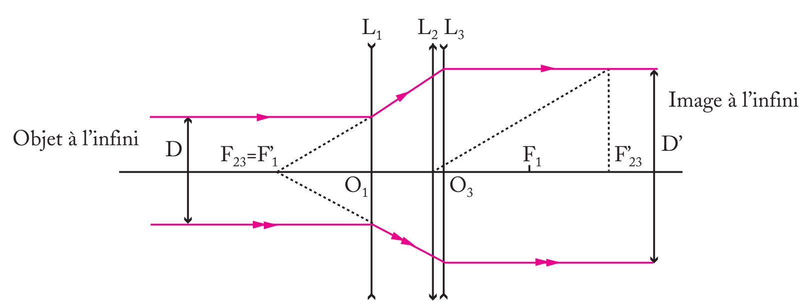
- Dans le triangle $F_3O_3O'_3$ :

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\overline{O_3O'_3}}{\overline{O_3F_3}} = \frac{D'}{2f_3} = \frac{-\Delta'}{2f'_1}$$

$$\gamma_1 = -\frac{f'_1}{f_{12}} = -\frac{f'_1 + f'_2}{f'_2}$$

A.N. $\gamma_1 = 0{,}7$.

**4.** Si on déplace la lentille $L_2$ jusqu'à la lentille $L_3$, nous obtenons un système similaire à celui obtenu dans la position 1 à condition que le sens de propagation de la lumière soit inversé. Aussi, en vertu du principe du retour inverse de la lumière, le système dans la position 2 sera également afocal.

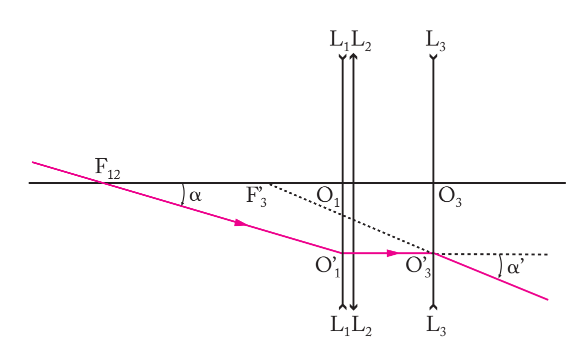



Dans la position 2, le faisceau parallèle à l'axe optique pénétrant dans la lentille $L_1$ est élargi. Par construction, le grandissement $\gamma_2$ est l'inverse du grandissement $\gamma_1$ :

$$\gamma_2 = -\frac{f'_2}{f'_1 + f'_2}$$

A.N. $\gamma_2 = 1{,}4$.

**5.**




**6.** Dans l'approximation de Gauss, on obtient d'après la figure ci-dessus :

- dans le triangle $F_{12}O_1O'_1$ :

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\overline{O_1O'_1}}{\overline{F_{12}O_1}} = \frac{\overline{O_1O'_1}}{f'_{12}}$$

- dans le triangle $F'_3O_3O'_3$ :

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{O_3O'_3}}{\overline{F'_3O_3}} = \frac{\overline{O_3O'_3}}{-f'_3}$$

avec, par construction, $O_1O'_1 = O_3O'_3$ et $f'_3 = f'_1$, il vient :

$$G_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_{12}}{f'_1} = -\frac{f'_2}{f'_1 + f'_2}$$

A.N. $G_1 = 1{,}4$.
Soit

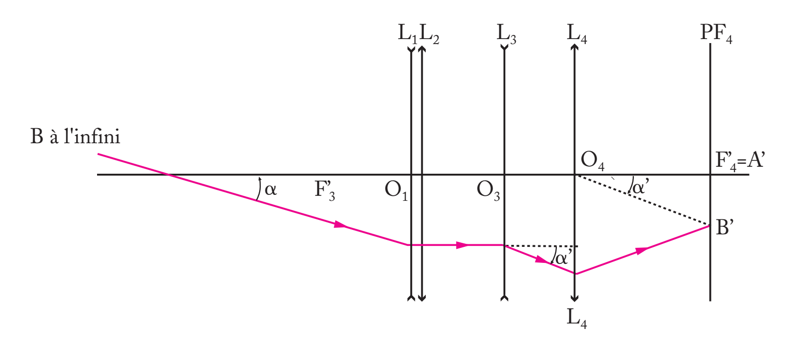
$$G_1 = \frac{1}{\gamma_1} = \gamma_2$$

**7.** De façon similaire, on a :

$$G_2 = \frac{1}{\gamma_1} = \gamma_2 = -\frac{f'_1 + f'_2}{f'_2}$$

A.N. $G_2 = 0{,}7$.

**8.** Supposons que le système soit dans la position 1 (un raisonnement identique pourra être fait si on choisit le système dans la position 2). Le faisceau émerge parallèle avec une incidence $\alpha'$ en entrant dans la lentille $L_4$. Le faisceau émergent converge en un point B' du plan focal image de $L_4$ (noté $PF_4$ sur la figure ci dessous), intersection de ce plan avec le rayon passant par $O_4$, et ce, quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence $\alpha'$ (et donc de celle de $\alpha$).




**9.** Pour réduire l'encombrement de l'appareil, il convient de placer la lentille $L_4$ accolée à la lentille $L_3$. La distance $L$ entre le plan de la lentille $L_1$ et le film photographique est alors égal à $L = e + f'_4 = 74$ mm.

**10.** Sur la figure de la question 8, l'angle $(\widehat{F'_4O_4B'})$ est égal, par construction, à $\alpha'$. Dans le triangle $F'_4O_4B'$, on a :

$$\alpha' = \frac{\overline{B'A'}}{f'_4} = G_1\alpha$$

soit

$$\overline{B'A'} = G_1 f'_4\,\alpha = \frac{f'_1 f'_4}{f'_1 + f'_2}\alpha$$

A.N. B'A'= 6,12 mm.

Dans la position 2, on a, de même :

$$\overline{B'A'} = G_2 f'_4\,\alpha = -\frac{(f'_1 + f'_2)f'_4}{f'_2}\,\alpha$$

**A.N.** B'A'= 5,12 mm

**11.** Dans la position 1,

$$f' = G_1 f'_4 = -\frac{f'_2 f'_4}{f'_1 + f'_2}$$

A.N. $f'$ = 70 mm.
Dans la position 2, :

$$f' = G_2 f'_4 = -\frac{(f'_1 + f'_2)f'_4}{f'_2}$$

A.N. $f'$ = 35,7 mm.

## Exercice 8 Microphotographie

Dans un appareil de microphotographie, on remplace le système classique objectif-oculaire par un système objectif-lentille, dite de « projection ». L'image intermédiaire $A_1B_1$ de l'objet étudié à travers l'objectif (assimilé à une lentille) est située en amont du plan focal objet de cette seconde lentille. L'image A'B' de AB est alors une image réelle, droite et agrandie. Considérons un tel appareil caractérisé par un objectif de distance focale $f'_1$ = 5 mm ; une lentille de projection de distance focale $f'_2$ = 22,5 mm ; la distance $d$ entre les centres optiques des deux lentilles étant égal à 18 cm ; la plaque sur laquelle se forme l'image est en arrière de la lentille de projection à $L$ = 36 cm de cette dernière.

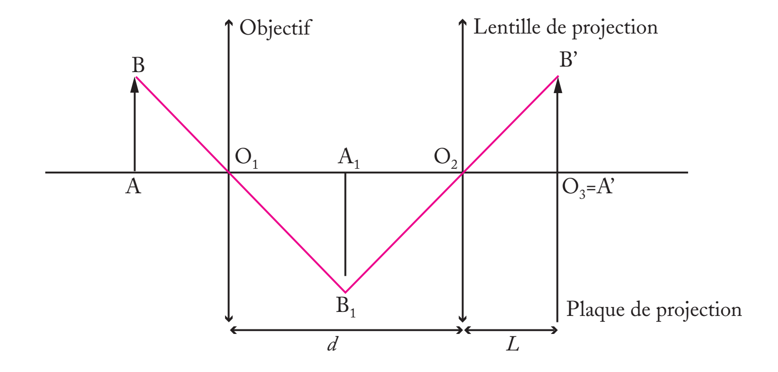
**1. Calculer la distance $x$ de l'objet à l'objectif.**

**2. Déterminer les grandissements $\gamma_1$, $\gamma_2$ et $\Gamma$ de l'objectif, de la lentille de projection et de l'appareil.**

**3. En déduire la longueur de l'image finale d'un objet de 10 microns.**

### Solution

**CONSEIL : pas de difficulté à signaler pour cet exercice.**



$$f'_1 = 5\text{mm}$$

$$f'_2 = 22{,}5 \text{ mm}$$

$$\overline{O_1O_2} = d = 180 \text{ mm}$$

$$\overline{O_2O_3} = L = 360 \text{ mm}$$

**1.** Pour que l'image se forme sur l'écran de projection, il faut que A', image finale de l'objet A, soit confondu avec $O_3$ : A' = $O_3$. Le schéma synoptique s'écrit :

$$A \xrightarrow{L'} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$$

On cherche la distance de l'objet A à l'objectif : $x = \overline{AO_1}$. Utilisons la relation de conjugaison de Descartes pour les points conjugués $A_1$ et $O_3$ (à travers l'oculaire) ; on a :

$$\frac{1}{\overline{O_2A_3}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'}$$

$$\overline{O_2A_1} = \frac{f'_2L}{f_2' - L}$$

A.N. $\overline{O_2A_1}$ = 24 mm.

La position de A est obtenue en utilisant la loi de conjugaison de Descartes pour les points conjugués A et $A_1$ (à travers l'objectif) :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'}$$

et :

$$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1} = d + \frac{Lf'_2}{f_2' - L}$$

La relation de conjugaison donne :

$$\overline{O_1A} = \frac{\overline{O_1A_1}f'_1}{f'_1 - \overline{O_1A_1}} = \frac{\left(d + \frac{Lf'_2}{f_2' - L}\right)f'_1}{f'_1 - \left(d + \frac{Lf'_2}{f_2' - L}\right)}$$

Il vient :

$$x = -\overline{O_1A} = \frac{(d(f'_2 - L) + Lf'_2)f'_1}{(d - f'_1)(f_2' - L) + Lf'_2}$$

A.N. $x$ = 5,165 mm.

**2.** Le grandissement $\gamma_1$ de l'objectif est défini par :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\left(d + \frac{Lf'_2}{f_2' - L}\right)\left[f'_1 - \left(d + \frac{Lf'_2}{f_2' - L}\right)\right]}{\left(d + \frac{Lf'_2}{f_2' - L}\right)f'_1}$$

$$\gamma_1 = \frac{(f_1' - d)(f_2' - L) - Lf_2'}{f_1'(f_2' - L)}$$

A.N. $\gamma_1 = -30{,}2$.

De même, le grandissement $\gamma_2$ de l'oculaire est défini par :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{L}{\left(\dfrac{Lf_2'}{f_2' - L}\right)} = \frac{(f_2' - L)}{f_2'}$$

A.N. $\gamma_2 = -15$.

Le grandissement $\Gamma$ de l'appareil est donné par : $\Gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_1\gamma_2$

On a donc :

$$\Gamma = \gamma_1\gamma_2 = \frac{(f_1' - d)(f_2' - L) - Lf_2'}{f_1'f_2'}$$

A.N. $\Gamma = 453$.

**3.** Avec $\Gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, on a $A'B' = |\Gamma|\, AB$. Pour $AB = 10\ \mu m$, $A'B' = 4{,}53$ mm.

## Exercice 9 Étude simplifiée d'un objectif de photocopieur

Le procédé de reprographie s'appuie sur la formation de l'image du document à travers l'objectif de reproduction sur une plaque photosensible. La reproduction d'un document de format $A_4$ peut se faire au même tirage ($A_4 \to A_4$), en tirage $A_4 \to A_3$ (la surface du document est doublée), ou encore en tirage $A_4 \to A_5$ (la surface est divisée par deux). Ces différents tirages sont obtenus en modifiant la position relative des lentilles à l'intérieur de l'objectif.

La distance entre le document et le récepteur photosensible est $D = 40$ cm ; une première lentille $L_1$ de distance focale $f_1' = -9$ cm est placée à $d = 18$ cm du récepteur.

**1. La lentille $L_1$ peut-elle donner une image du document sur le récepteur ?**

On place une lentille L' devant $L_1$ à $d' = d = 18$ cm du document.

**2. Calculer la distance focale $f'$ de la lentille L' pour que l'image du document se forme sur le récepteur.**

**3. Calculer le grandissement $\gamma_1$ de l'association des deux lentilles. Quel type de tirage permettra cet objectif ?**

En fait, la lentille L' est constituée de deux lentilles accolées $L_2$ et $L_3$, $L_2$ étant identique à $L_1$.

**4. Calculer la distance focale $f'_3$ de la lentille $L_3$.**

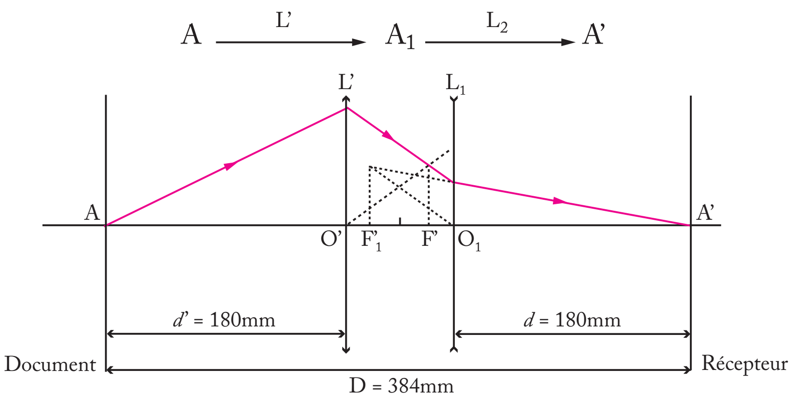
**5. On déplace la lentille $L_2$, afin de l'accoler à $L_1$. Montrer que l'image du document se forme encore sur le récepteur et calculer le grandissement $\gamma_2$ correspondant à l'association de ces trois lentilles. En déduire le type de tirage obtenu.**

## Solution

**CONSEIL : cet exercice sur un photocopieur peut impressionner, mais il reste accessible. Suivant les questions, le système étudié comporte une, deux ou trois lentilles. Mais dans ce dernier cas, comme dans l'exercice 7, deux des lentilles sont accolées et on peut introduire une lentille équivalente pour se ramener à un problème à deux lentilles. L'objectif est de montrer que lorsque que la position de la lentille du milieu varie, on passe d'un tirage A4 ⟶ A3 à un tirage A4 ⟶ A5. Après cet exercice, vous ne photocopierez plus jamais comme avant !**

**1.** L'objet est réel, la lentille divergente $L_1$ ne peut pas donner une image réelle directement observable sur le récepteur.

**2.** Soit $A_1B_1$ l'image intermédiaire de AB à travers L' et A'B' l'image définitive à travers $(L_1,L')$ :




La relation de conjugaison de Descartes pour les points $(A, A_1)$ conjugués à travers L' et $(A_1, A')$ pour $L_1$ s'écrit:

$$\frac{1}{\overline{O'A_1}}-\frac{1}{\overline{O'A}}=\frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{O_1A'}}-\frac{1}{\overline{O_1A_1}}=\frac{1}{f'_1}$$

soit :

$$\overline{O'A_1}=\frac{\overline{O'A}f'}{\overline{O'A}+f'} \quad \text{et} \quad \overline{O_1A_1}=\frac{\overline{O_1A'}f'_1}{f'_1-\overline{O_1A'}}$$

L'objet A est sur le document, $\overline{O'A}=-d'$, et on veut que l'image définitive A' se forme sur le récepteur, soit $\overline{O_1A'}=d$, il vient donc :

$$\overline{O'A_1}=\frac{d'f'}{d'-f'} \quad \text{et} \quad \overline{O_1A_1}=\frac{d'f'_1}{f'_1-d'}$$

Avec :

$$\overline{O'A_1}=\overline{O'O_1}+\overline{O_1A_1}=(D-d-d')+\overline{O_1A_1}$$

Il vient donc :

$$\frac{d'f'}{d'-f'}=(D-d-d')+\frac{d'f'_1}{f'_1-d'}$$

Finalement, $f'$ est égale à :

$$f' = \frac{d'[(D-d')(f_1'-d)+d^2]}{D(f_1'-d)+d^2}$$

A.N. $f'$= 57,3 mm.

**3.** Le grandissement $\gamma_1$ peut être calculé à partir des deux grandissements successifs dus à L' et $L_1$ :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}}\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$$

avec :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A_1}} = \frac{(f_1'-d)}{f_1'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O'A_1}}{\overline{O'A}} = \frac{f'}{(f'-d')}$$

il vient :

$$\gamma_1 = \frac{(f_1'-d)f'}{f_1'(f'-d)}$$

A.N. $\gamma_1 = -1,4 \approx -\sqrt{2}$.

On a donc $\gamma_1^2 = 2$ : si l'objet, de taille $L_0$, est grandi d'un facteur $\sqrt{2}$ (L = $\sqrt{2}\ L_0$), la surface du document (surface $S_0 = L_0 \times L_0$) est multipliée par 2 ($S = L \times L = 2\ S_0$). Le tirage est donc $A_4 \to A_3$.

**4.** L' est formée de l'ensemble ($L_2$, $L_3$) accolées. En utilisant les relations de vergences relatives aux lentilles accolées, et avec $f_2' = f_1'$, on a :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_3'}$$

soit

$$f' = \frac{f'f_1'}{(f_1'-f')}$$

A.N. $f'$= 35 mm.

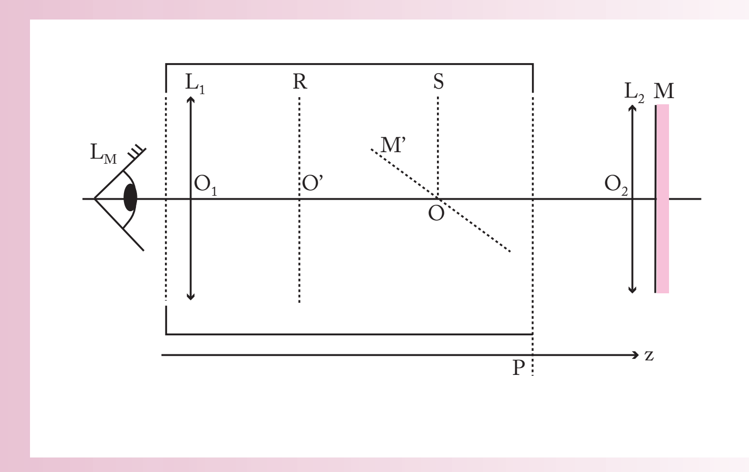
**5.** Lorsque la lentille $L_3$ glisse pour s'accoler à $L_1$, le système optique devient un système similaire au système précédent, à condition que la lumière se propage en sens inverse. En vertu du principe du retour inverse, les relations de conjugaison sont toujours vérifiées, l'image se fera toujours sur le récepteur. En revanche, au lieu d'être agrandie d'un facteur 2, elle sera réduite d'un facteur 2 dans la nouvelle configuration puisque :

$$\gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le tirage obtenu est $A_4 \to A_5$.

## Exercice 10 Dispositif optique de mesure de l'amétropie d'un œil

L'objet de cet exercice est l'étude d'un instrument optique destiné à mesurer le défaut dioptrique de l'œil d'un patient. Médecin et patient se placent de part et d'autre de l'instrument formé successivement :
- d'une lentille convergente $L_1$ de distance focale $f'_1$ et centrée en $O_1$,
- d'une lame de verre transparente R (réticule) centrée en O', dont on négligera l'épaisseur et portant une graduation gravée sur une face,
- d'un miroir semi-réfléchissant M' incliné à 45° et centré en O,
- d'une lentille mince convergente $L_2$ de distance focale $f'_2$ et centrée en $O_2$.




Une source ponctuelle S est placée sur la perpendiculaire à l'axe optique passant par O et telle que SO = O'O. Une platine mobile porte l'ensemble $L_1$, R, M' et S et sur cette platine, les éléments R, M' et S sont fixes ; on peut déplacer $L_1$ sur la platine le long de l'axe optique.

L'ensemble fonctionne de la manière suivante : les rayons lumineux issus de S sont partiellement réfléchis sur M' puis traversent $L_2$. Lorsque le réglage est correct, les rayons émergeants de $L_2$ rencontre l'œil du patient et forme une image lumineuse sur sa rétine. Cette image sert alors d'objet pour $L_2$ qui donne, à travers M' et $L_1$, une image que le médecin voit nettement.

Dans un réglage préliminaire (figure ci-dessus), le médecin règle « à son œil » la position de la lentille $L_1$ sur la platine de façon à obtenir une image nette du réticule R. Il remplace ensuite l'œil du patient par un miroir M et règle la platine de façon à obtenir une image nette de S à travers l'ensemble (M', $L_2$, M, $L_2$, $L_1$). Un dispositif permet de positionner le zéro d'une graduation (axe P*z*) parallèle à l'axe optique pour cette position de la platine.

**1. Exprimer la distance $O'O_2$ et montrer que les portions de rayons issus de S et se propageant entre $L_2$ et le miroir sont parallèles à l'axe optique.**

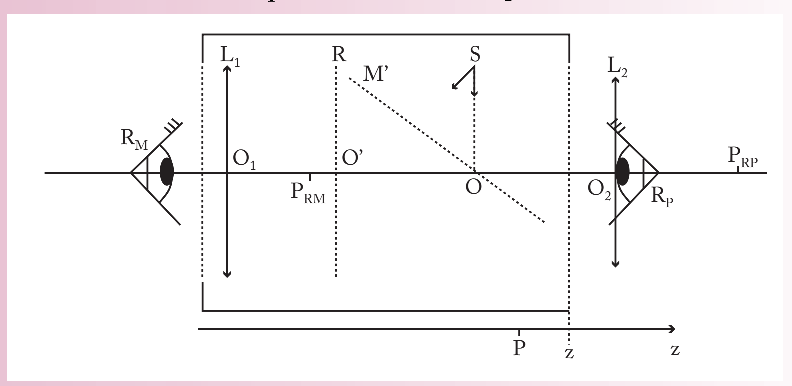
**2. Faire un dessin du montage et tracer le trajet d'un rayon issu de S et parvenant à l'œil du médecin.**

L'œil du patient est alors mis au repos (gouttes d'atropine) derrière la lentille $L_2$. Le médecin déplace alors la platine, sans modifier les positions relatives des éléments $L_1$ (préalablement réglé), R, M' et S , jusqu'à obtenir une image nette de S", image de S sur la rétine du patient. Il repère alors la position *z* de la platine.

**3. Calculer la nouvelle distance $O'O_2$ en fonction de $f_2'$ et *z*.**

**4. Quel est, à travers l'œil, le point conjugué de son *punctum remotum* ?**

La figure ci-dessous montre un schéma de principe du réglage, où $P_{RM}$ est le *punctum remontum* du médecin et $P_{RP}$ le *ponctum remotum* du patient.




**5. Prolonger les deux rayons issus de S et qui vont former une image S'' sur la rétine du patient. Tracer, en retour, le trajet d'un rayon issu de S'' et qui arrive, après avoir traversé ($L_2$, $L_1$) à l'œil du médecin.**

**6. Établir l'expression de la vergence *C* des verres correcteurs que doit porter le patient pour avoir une vision normale de loin en fonction de la distance $O_2P_{R2}$. En déduire la relation, utilisée par le médecin, donnant C en fonction de *z* et de $f_2'$.**

## Solution

**CONSEIL : ne nous mentons pas, cet exercice est difficile ! Mais il apporte la satisfaction de comprendre enfin les manipulations de l'ophtalmologiste derrière son instrument. L'introduction de la solution analyse la progression du problème et sa lecture peut vous guider.**

Le réglage préliminaire est effectué de façon à ce que le réticule (et donc le point O') forme une image nette pour l'œil du médecin, c'est-à-dire à travers l'ensemble ($L_1$, $L_M$). Ce réglage étant fait une fois pour toutes, nous retiendrons simplement que le médecin voit une image nette si l'objet correspondant avant ($L_1$, $L_M$) est en O'. Lorsqu'il positionne le miroir M, toujours lors du réglage préliminaire, le médecin veut obtenir de S une image nette à travers (M', $L_2$, M, $L_2$, $L_1$, $L_M$). D'après ce que nous venons de dire, il faut donc que S forme à travers (M', $L_2$, M, $L_2$) une image en O'. On pourra montrer que l'image de S par M' est en O'. On veut donc que O' forme son image à travers ($L_2$, M, $L_2$). On reconnaît là le réglage de l'autocollimation. Les questions 3 et 4 sont simples. Si on a résolu correctement la question 1, on sait que O' est dans le réglage préliminaire à la distance $f'_2$ de $O_2$. Si la platine (et donc O') se translate de *z*, $O_2$ étant fixe, la nouvelle distance $O'O_2$ est égale à $f'_2 - z$. Pour la question 4, on sait qu'un œil au repos forme l'image de son punctum remotum sur sa rétine.

La clé du fonctionnement de l'appareil se trouve dans les questions 5 et 6. On se demande quel trajet suivent les rayons issus de S lorsque le réglage a été réalisé avec l'œil du patient de façon à ce que le médecin voit une image nette S" de S sur la rétine du patient. Il faut pour cela que S forme en S" une image nette à travers l'ensemble (M', $L_2$, œil du patient). D'après ce que nous savons, il faut donc que l'image de O' par $L_2$ se forme en $P_{RP}$ : l'œil formera alors de $P_{RP}$ une image nette S" sur sa rétine. O' et $P_{RP}$ sont donc des points conjugués par $L_2$ et on peut en déduire la distance O'$O_2$.
L'œil est une lentille de centre $O_2$ (l'œil est accolé à $L_2$). Sans correction, il forme de $P_{RP}$ une image nette en S" sur sa rétine. Il sera corrigé par une lentille L de vergence *C* telle qu'un objet à l'infini forme à travers L une image en $P_{RP}$. La relation de conjugaison de Descartes permet d'exprimer *C* en fonction de $OP_{RP}$. Cette relation, associée à la précédente, conduit à *C* en fonction de z.

**1.** La lentille $L_1$ est réglée de façon à ce que le médecin voit le réticule nettement à travers $L_1$. Sans avoir besoin d'information sur l'œil $L_M$ du médecin, on sait que O' forme son image à travers l'ensemble ($L_1$, $L_M$) sur sa rétine $R_M$ ; a donc :

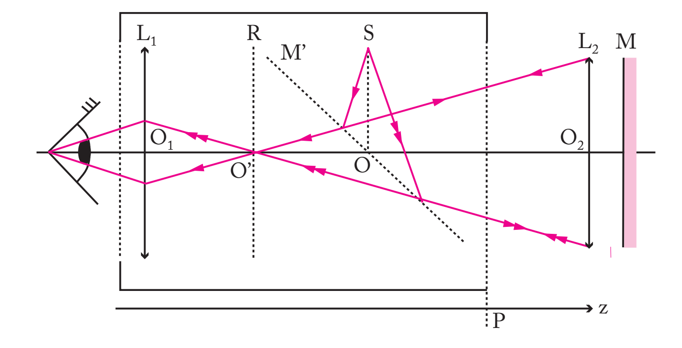
$$O' \xrightarrow{L_1+L_M} R_M$$

L'image finale de S ne peut être vue nettement par le médecin que si son image intermédiaire avant $L_1$ et $L_M$ coïncide avec le point O'. Par ailleurs, l'image de S à travers le miroir coïncide avec O' puisque M' est incline de 45° et SO = O'O. On doit donc avoir :

$$(S \xrightarrow{M'}) \; O' \xrightarrow{L_2} S_L \xrightarrow{M} S_M \xrightarrow{L_2} O'$$

On retrouve le réglage effectué pour la mesure d'autocollimation : le schéma synoptique ci-dessus n'est possible que si O' est dans le plan focal objet de $L_2$ : O' = $F_2$.

**2.** Pour le dessin, remarquons que les rayons « aller » issus de O' émergent de $L_2$ parallèles à l'axe optique (avec O' = $F_2$) ; ils sont alors réfléchis par le miroir toujours parallèlement à l'axe optique. Le sens de propagation de la lumière étant inversé, $F_2$ joue le rôle de point focal image pour ces rayons lorsqu'ils traversent à nouveau $L_2$ : ils convergent donc sur le réticule en O'. De là, on sait que le réglage de $L_1$ permet au médecin de voir nettement l'image finale, mais on n'a pas l'information nécessaire pour tracer le trajet des rayons (on représente en pointillé un trajet possible convergeant sur la rétine de l'œil du médecin).

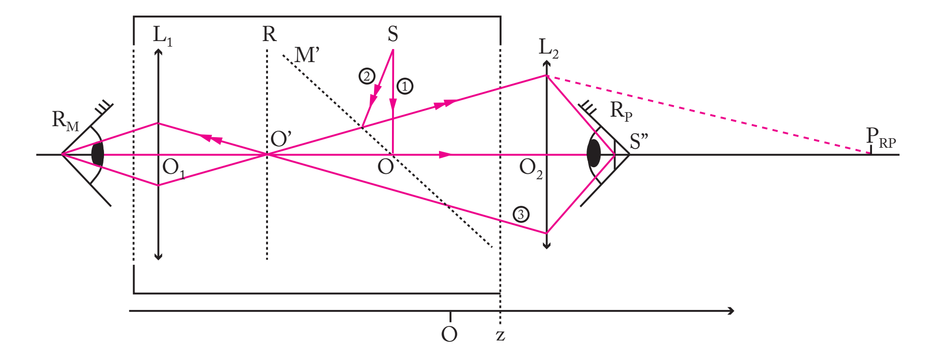


**3.** Dans le nouveau réglage, seule la position de la platine a changé. Si $z > 0$, la platine s'est rapprochée de la lentille $L_2$ ; elle s'en est éloigné si $z < 0$. La distance initiale $O'O_2$ étant égale à $f_2'$ d'après la question précédente, on a donc dans le nouveau réglage :

$$O'O_2 = f_2' - z \text{ avec } z < f_z'$$

**4.** Par définition, le point conjugué du *Punctum Remotum* pour l'œil au repos est un point sur la rétine.

**5.** Le rayon ① vertical (simple flêche) issu de S est réfléchi par le miroir parallèlement à l'axe optique : il ne sera plus dévié puisqu'il passera par le centre optique des lentilles $L_2$ puis $L_1$. Le rayon ② est réfléchi par le miroir ; il rencontre ensuite $L_2$ et converge vers l'image de O' à travers $L_2$, soit $P_{RP}$. L'œil du patient forme de ces rayons une image S" sur sa rétine. Le rayon ③ (quelconque) issu de S" forme, à travers l'œil du patient et la lentille $L_2$, une image intermédiaire en O' : le réglage préliminaire assure que O' est vu nettement par le médecin.




**6.** D'après la question précédente, O' forme son image à travers $L_2$ en $P_{RP}$. On a donc :

$$\frac{1}{\overline{O_2P_{RP}}} - \frac{1}{\overline{O_2O'}} = \frac{1}{f_2'}$$

Si l'œil est normal, le médecin n'aura pas à déplacer la platine. On aura en effet $\overline{O_2P_{RP}} = \infty$, soit $\overline{O'O_2} = f_2'$.

L'œil est une lentille de centre $O_2$ (l'œil est accolé à $L_2$). Non corrigé, il forme d'un objet au $P_{RP}$ une image sur sa rétine. Pour le corriger, on doit lui accoler une lentille L de vergence *C* telle qu'un objet à l'infini forme à travers L une image en $P_{RP}$. On a donc pour la lentille de correction :

$$\frac{1}{\overline{O_2P_{RP}}} - \frac{1}{\infty} = C$$

On en déduit finalement :

$$C - \frac{1}{\overline{O_2O'}} = \frac{1}{f_2'}$$

avec $\overline{O'O_2} = f_2' - z$ , il vient :

$$C = \frac{z}{f_2'(f_2' - z)}$$

On pourra vérifier par un dessin que $z > 0$ correspond à un œil hypermétrope : son $P_{RP}$ est situé derrière lui et il faut lui accoler une lentille convergente ($C > 0$) pour le corriger. De même, $z < 0$ correspond à un œil myope : son $P_{RP}$ est devant lui à distance finie et il faut lui accoler une lentille divergente ($C < 0$) pour le corriger. La figure ci-dessous donne

$y = Cf_2'$ en fonction de $x = \frac{z}{f_2'}$ :

$$y = Cf_2' = -\frac{x}{1-x}, \quad x = \frac{z}{f_2'}$$

